

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. El examen permite elegir tres problemas de uno de los ejercicios; aquí se desarrollan todos.

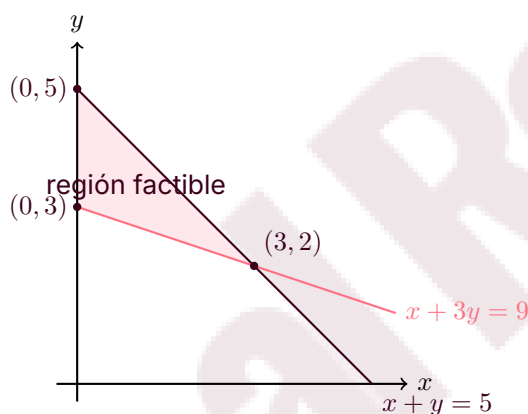
Ejercicio A

Problema 1 · Región factible y funciones lineales

Las restricciones delimitan una región del primer cuadrante comprendida entre dos rectas. Para representarla, buscamos primero sus vértices. Sobre el eje y ($x = 0$), las desigualdades dan $3 \leq y \leq 5$, de modo que aparecen $(0, 3)$ y $(0, 5)$. La intersección de las rectas se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x + 3y = 9, \end{cases} \quad 2y = 4 \Rightarrow y = 2, \quad x = 3.$$

Así, el tercer vértice es $(3, 2)$ y la región factible es el triángulo formado por esos puntos.



Como las funciones objetivo son lineales, sus extremos en esta región poligonal se alcanzan en alguno de los vértices. Evaluamos ambas funciones en los tres puntos:

(x, y)	$(0, 3)$	$(0, 5)$	$(3, 2)$
$f(x, y) = 2x + 3y$	9	15	12
$g(x, y) = y - x$	3	5	-1

$$f_{\max} = 15 \text{ en } (0, 5), \quad f_{\min} = 9 \text{ en } (0, 3); \quad g_{\max} = 5 \text{ en } (0, 5), \quad g_{\min} = -1 \text{ en } (3, 2).$$

Problema 2 · Reparto de viajeros y recaudación

Sean x , y y z los viajeros que pagan, respectivamente, el billete completo, el 20% y el 50%. El total de viajeros y la relación indicada en el enunciado proporcionan

$$x + y + z = 500, \quad y = 2x.$$

Los precios son 9, $0,2 \cdot 9 = 1,8$ y $0,5 \cdot 9 = 4,5$ euros; la recaudación añade la ecuación

$$9x + 1,8y + 4,5z = 2115.$$

Sustituimos $y = 2x$ y $z = 500 - 3x$ en esta última igualdad:

$$9x + 1,8(2x) + 4,5(500 - 3x) = 2115 \Rightarrow 12,6x + 2250 - 13,5x = 2115 \Rightarrow x = 150.$$

Entonces $y = 300$ y $z = 500 - 150 - 300 = 50$. Los tres valores son enteros no negativos y suman los 500 viajeros.

$$150 \text{ viajeros pagaron el billete completo, } 300 \text{ pagaron el 20\%, } 50 \text{ pagaron el 50\%}.$$

Problema 3 · Máximo y variación de la velocidad

La distancia recorrida pertenece al intervalo $0 \leq x \leq 200$. La función es polinómica, por lo que está definida en todo $\mathbb{R}$; para este problema su dominio físico es $[0, 200]$. La escribimos desarrollada y derivamos:

$$f(x) = -0,00055x(x - 300) = -0,00055x^2 + 0,165x, \quad f'(x) = -0,0011x + 0,165.$$

Para localizar el máximo interior resolvemos $f'(x) = 0$:

$$-0,0011x + 0,165 = 0 \Rightarrow x = 150 \text{ m.}$$

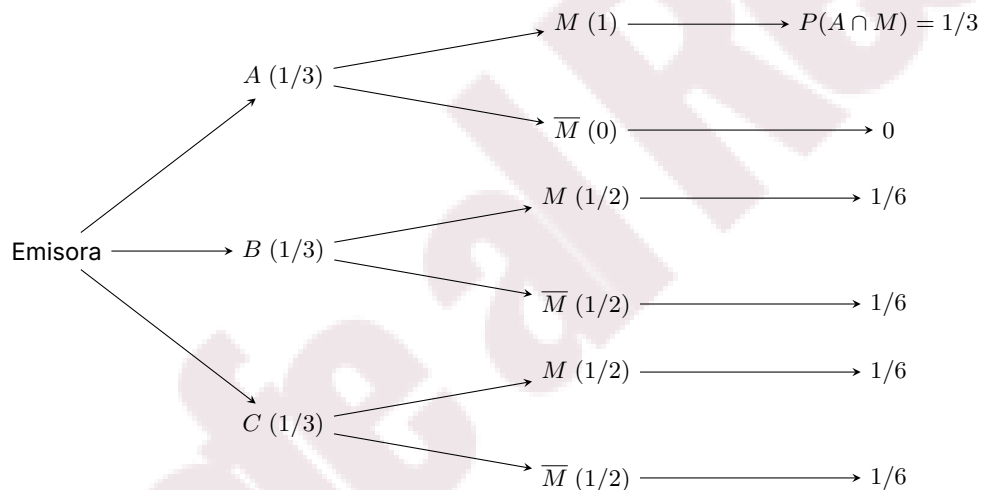
Para justificar el signo en cada intervalo, probamos $x = 100$ en $(0, 150)$ y $x = 180$ en $(150, 200)$: $f'(100) = 0,055 > 0$ y $f'(180) = -0,033 < 0$. Por tanto, la velocidad crece en $[0, 150]$ y decrece en $[150, 200]$. El cambio de positiva a negativa confirma un máximo en $x = 150$.

$$f(150) = -0,00055(150)(-150) = 12,375 = \frac{99}{8} \text{ m/s}, \quad f(200) = -0,00055(200)(-100) = 11 \text{ m/s.}$$

La velocidad máxima es $\frac{99}{8}$ m/s y se alcanza a 150 m; llega a meta a 11 m/s.

Problema 4 · Probabilidad de escuchar música

Sea M el suceso «escuchar música». Las tres emisoras se sintonizan con probabilidad $1/3$. En una rama del árbol multiplicamos las probabilidades sucesivas; para obtener un mismo suceso por caminos incompatibles, sumamos sus probabilidades conjuntas.



Sumamos los caminos que terminan en música:

$$P(M) = P(A)P(M | A) + P(B)P(M | B) + P(C)P(M | C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Para la probabilidad pedida en b), aplicamos la definición de probabilidad condicionada. Como «estar en B» y «no escuchar música» es un camino del árbol,

$$P(B | \overline{M}) = \frac{P(B \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}.$$

$$P(M) = \frac{2}{3}, \quad P(B | \overline{M}) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Programación lineal y beneficio

Sean x e y los paquetes de tipo A y B. El beneficio que se quiere maximizar es $B = 6x + 5y$. No se pueden vender más refrescos de los disponibles, así que las restricciones son

$$3x + 2y \leq 120, \quad 3x + 4y \leq 180, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Como el beneficio es lineal y la región factible es un polígono, el máximo se alcanza en alguno de sus vértices. Estos son $(0, 0)$, $(40, 0)$, $(0, 45)$ y la intersección de las dos rectas de recursos. Resolvemos esta intersección:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 120, \\ 3x + 4y = 180, \end{cases} \Rightarrow 2y = 60 \Rightarrow y = 30, \quad x = 20.$$

Al evaluar el beneficio en los vértices,

(x, y)	$(0, 0)$	$(40, 0)$	$(20, 30)$	$(0, 45)$
$B = 6x + 5y$	0	240	270	225

El mayor valor es 270 y se obtiene con cantidades enteras de paquetes, por lo que no hace falta ajustar la solución.

Debe vender 20 paquetes de tipo A y 30 de tipo B; el beneficio máximo es 270 €.

Problema 2 · Recta paralela e intersección

El vector director del lado AB se obtiene restando las coordenadas de sus extremos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 0, 2 - 1) = (1, 1).$$

Una recta paralela tiene ese mismo vector director. Al pasar por $C = (3, 0)$, su ecuación paramétrica es

$$(x, y) = (3, 0) + \lambda(1, 1), \quad \text{es decir} \quad x = 3 + \lambda, \quad y = \lambda.$$

Eliminando el parámetro resulta $y = x - 3$. Para hallar la intersección con $x + 3y = 2$, sustituimos esa relación:

$$x + 3(x - 3) = 2 \Rightarrow 4x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{4}, \quad y = \frac{11}{4} - 3 = -\frac{1}{4}.$$

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = \lambda, \end{cases} \quad P\left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Problema 3 · Tasas medias de variación

La tasa media de variación de una función en $[a, b]$ es

$$\text{TVM}_{[a,b]}(f) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Aquí $f(t) = 2,1t^2 + 0,8t - 1$ expresa el beneficio en miles de euros, con $t = 0$ en 1991 y $t = 9$ en 2000. En todo el periodo,

$$f(0) = -1, \quad f(9) = 2,1 \cdot 81 + 0,8 \cdot 9 - 1 = 176,3,$$

$$\text{TVM}_{[0,9]}(f) = \frac{176,3 - (-1)}{9} = 19,7 \text{ miles de euros/año.}$$

Los dos últimos años corresponden a $t = 8$ y $t = 9$. Como $f(8) = 2,1 \cdot 64 + 0,8 \cdot 8 - 1 = 139,8$,

$$\text{TVM}_{[8,9]}(f) = \frac{176,3 - 139,8}{9 - 8} = 36,5 \text{ miles de euros/año.}$$

Ambas tasas son positivas, de modo que el beneficio crece en los dos intervalos. La tasa mayor en los dos últimos años indica que crece más deprisa al final.

19,7 miles de €/año en 1991–2000;	36,5 miles de €/año en 1999–2000.
-----------------------------------	-----------------------------------

Problema 4 · Aciertos en un examen tipo test

Cada pregunta tiene una probabilidad $p = 1/3$ de acierto; la de fallo es $q = 1 - p = 2/3$. Al haber cuatro preguntas independientes, el número de aciertos X sigue una binomial $X \sim \text{Bin}(4, 1/3)$. Aprobar significa obtener al menos dos aciertos, es decir, $X \geq 2$. Para una binomial, la probabilidad de obtener exactamente k éxitos es $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Usamos el complementario, que solo requiere los casos de cero y un acierto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \binom{4}{1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{16}{81} - \frac{32}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}.$$

$P(\text{aprobar}) = \frac{11}{27} \approx 0,4074.$
