



INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen presenta dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir **UNA Y SÓLO UNA** de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.

No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos

OPCIÓN A

1. (2 puntos). Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}$

2. (2 puntos). a) (1 punto). Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x .

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.

3. (3 puntos). Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto). Comprobar que $\det(A^2) = (\det A)^2$ y que $\det(A - I) = \det A - \det I$.

b) (0,5 puntos). Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple que $\det(M^2) = (\det M)^2$? Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos). Encontrar todas las matrices cuadradas M , de orden 2, tales que:
 $\det(M - I) = \det M - \det I$.

4. (3 puntos). Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

a) (1 punto). Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B .

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B .

c) (1,5 puntos). Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A .

OPCIÓN B

1. (2 puntos). a) (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

2. (2 puntos). a) (1 punto). Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$.

b) (1 punto). Para una cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado a), calcular

$$M = A + A^2 + \dots + A^{10}$$

3. (3 puntos). Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) (1,5 puntos). Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) (1,5 puntos). Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

4. (3 puntos). Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\pi,0)$, $C(0,0,4)$. Se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar el valor de $\pi > 0$ de manera que el volumen del tetraedro OABC (donde O es el origen), sea 2.

b) (1,5 puntos). Para el valor de π obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro OABC correspondiente al vértice O.