

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria ordinaria de 2024

Se desarrollan las ocho preguntas del examen. En la prueba basta con responder a cuatro.

Pregunta A.1 - Sistemas de ecuaciones

Sean L , I y C las longitudes, en centímetros, de los listones largos, intermedios y cortos. Igualando las dos longitudes totales descritas en el enunciado, expresando la diferencia entre los listones y comparando los otros dos tramos, obtenemos

$$\begin{cases} 2L + 4I = 3I + 15C, \\ L = I + C + 17, \\ 9C + 7 = I + L. \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene $2L + I - 15C = 0$. En la tercera, sustituimos $L = I + C + 17$:

$$9C + 7 = 2I + C + 17 \implies I = 4C - 5.$$

Entonces, por la segunda ecuación,

$$L = (4C - 5) + C + 17 = 5C + 12.$$

Sustituimos I y L en $2L + I - 15C = 0$:

$$2(5C + 12) + (4C - 5) - 15C = 0 \implies -C + 19 = 0 \implies C = 19.$$

Así, $I = 4 \cdot 19 - 5 = 71$ y $L = 5 \cdot 19 + 12 = 107$. **Conclusión.** Los listones cortos miden 19 cm, los intermedios 71 cm y los largos 107 cm.

Pregunta A.2 - Análisis

a) Recta tangente en $x = \pi$

Para hallar la tangente usamos $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ con $a = \pi$. La función y su derivada son

$$f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4, \quad f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3.$$

Al evaluar en $x = \pi$:

$$f(\pi) = 5\pi^4, \quad f'(\pi) = 10\pi^3.$$

Por tanto,

$$y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi).$$

Conclusión. La recta tangente es $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$.

b) Existencia de una raíz de f' en $(-\pi, 0)$

Teorema de Rolle. Como f es un polinomio, es continua en $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$. Además,

$$f(-\pi) = \pi^4 = f(0).$$

Se cumplen las tres hipótesis del teorema de Rolle, así que existe $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano. También podemos aplicar Bolzano a f' , que es continua al ser un polinomio. En los extremos del intervalo,

$$f'(-\pi) = -2\pi^3 < 0, \quad f'(0) = \pi^3 > 0.$$

Como f' cambia de signo entre $-\pi$ y 0 , Bolzano garantiza un punto $c \in (-\pi, 0)$ para el que $f'(c) = 0$. **Conclusión.** Ambos teoremas prueban que f' se anula al menos una vez en $(-\pi, 0)$.

c) Área entre $f(x)$ y $g(x) = f(-x)$ en $[0, \pi]$

Primero comparamos las funciones para saber cuál queda por encima:

$$g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4,$$

$$f(x) - g(x) = 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 2\pi x(x^2 + \pi^2) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Por tanto, el área es la integral de $f - g$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} (f(x) - g(x)) dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} (x^3 + \pi^2 x) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{3\pi^5}{2}. \end{aligned}$$

Conclusión. El área comprendida entre las dos gráficas es $\frac{3\pi^5}{2}$ unidades cuadradas.

Pregunta A.3 - Geometría en el espacio

a) Plano por A y B perpendicular a $z = 0$

El vector que une los puntos es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 0, 1 - 0, 0 - 1) = (1, 1, -1).$$

El plano $z = 0$ tiene vector normal $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Si el plano buscado tiene normal $\vec{n}$, la perpendicularidad entre planos exige $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$, de modo que su componente z es nula. Además, $\vec{n}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ para que el plano contenga la dirección AB . Un vector que cumple ambas condiciones es

$$\vec{n} = (1, -1, 0).$$

La ecuación general del plano es $x - y + D = 0$. Al imponer que pase por $A(0, 0, 1)$, resulta $D = 0$. **Conclusión.** Una ecuación del plano es $x - y = 0$.

b) Rectas paralelas en $x + z = 1$ a distancia 1

Las dos rectas han de tener un vector director común que pertenezca al plano $x + z = 1$. Elegimos

$$\vec{v} = (1, 4, -1),$$

pues sus componentes verifican $1 + (-1) = 0$, la condición para que sea paralelo al plano. Las rectas paramétricas que pasan por A y B son

$$r_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = 4t, \\ z = 1 - t, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = -t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En ambas, $x + z = 1$. Para comprobar la distancia entre rectas paralelas, usamos un vector que une puntos correspondientes, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$:

$$d(r_1, r_2) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(3, 0, 3)\|}{\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 1.$$

Conclusión. Las rectas anteriores son paralelas, pasan por A y B , están en $x + z = 1$ y distan una unidad.

Pregunta A.4 - Probabilidad

a) Cálculo de $P(A \cap B)$ y $P(B)$

Del enunciado conocemos $P(A) = \frac{11}{20}$, $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$ y

$$P(A | B) - P(B | A) = \frac{1}{24}.$$

Los sucesos $A \cap B$ y $A \cap \overline{B}$ son incompatibles y forman todo A . Por eso,

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{11}{20} - \frac{3}{10} = \frac{1}{4}.$$

Usamos la definición de probabilidad condicionada para calcular $P(B | A)$:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}} = \frac{5}{11}.$$

Entonces,

$$P(A|B) = P(B|A) + \frac{1}{24} = \frac{5}{11} + \frac{1}{24} = \frac{131}{264}.$$

Como $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, despejamos:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{131}{264}} = \frac{66}{131}.$$

Conclusión. $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $P(B) = \frac{66}{131}$.

b) Probabilidad de un suceso C independiente de A

La independencia implica $P(A \cap C) = P(A)P(C)$. Aplicamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C).$$

Si llamamos $p = P(C)$ y sustituimos los datos,

$$\frac{14}{25} = \frac{11}{20} + p - \frac{11}{20}p \implies \frac{9}{20}p = \frac{1}{100} \implies p = \frac{1}{45}.$$

Conclusión. $P(C) = \frac{1}{45}$.

Pregunta B.1 - Matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = bM, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

a) Valores de b con $BCB^{-1} = A$

La expresión solo está definida si B es invertible. Como $\det(M) = -1$, se tiene $\det(B) = b^3 \det(M) = -b^3 \neq 0$ para todo $b \neq 0$. Además,

$$BCB^{-1} = (bM)C(bM)^{-1} = MCM^{-1}.$$

Para comprobar si esta matriz coincide con A , es suficiente verificar $MC = AM$:

$$MC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = AM.$$

Como M es invertible, de $MC = AM$ se deduce $MCM^{-1} = A$. **Conclusión.** La igualdad se cumple para todo $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Determinante de AA^T

Usamos que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que $\det(A^T) = \det(A)$:

$$\det(AA^T) = \det(A)^2.$$

El determinante de A vale

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Conclusión. $\det(AA^T) = 12^2 = 144$.

c) Sistema para $b = 1$

Para $b = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3, \\ 2x + 3y + z = -1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Restando la tercera ecuación de la primera obtenemos $y = 2$. La tercera da $x + z = -1$, mientras que la segunda, al sustituir $y = 2$, da $2x + z = -7$. Restamos estas dos últimas ecuaciones y hallamos $x = -6$; entonces $z = 5$. **Conclusión.** La solución es $(x, y, z) = (-6, 2, 5)$.

Pregunta B.2 - Cálculo

a) Integral definida

Integramos por partes con $u = \ln x$ y $dv = (x + 2) dx$. Así, $du = \frac{1}{x} dx$ y $v = \frac{x^2}{2} + 2x$:

$$\begin{aligned}\int_1^e (x + 2) \ln x \, dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \frac{1}{x} dx \\&= \frac{e^2}{2} + 2e - \left[\frac{x^2}{4} + 2x \right]_1^e \\&= \frac{e^2 + 9}{4}.\end{aligned}$$

Conclusión. La integral vale $\frac{e^2+9}{4}$.

b) Límite de una potencia de tipo 1^∞

Sea

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\tan \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

La base tiende a 1 y el exponente no está acotado, así que tomamos logaritmos:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan(x/2))}{\cos x}.$$

El cociente es de tipo $0/0$. Aplicamos L'Hôpital; la derivada del numerador es $1/\sin x$:

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1/\sin x}{-\sin x} = -1.$$

Por tanto, $L = e^{\ln L} = e^{-1}$. **Conclusión.** El límite es $\frac{1}{e}$.

Pregunta B.3 - Geometría en el espacio

a) Posibles valores de a

Tomamos P_1 como vértice común y calculamos los vectores que determinan el tetraedro:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= P_2 - P_1 = (2 - 1, 1 - 1, 0 - 1) = (1, 0, -1), \\ \overrightarrow{P_1P_3} &= P_3 - P_1 = (1 - 1, 3 - 1, 2 - 1) = (0, 2, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_4} = P_4 - P_1 = (2, a - 1, 2).\end{aligned}$$

El volumen de un tetraedro es una sexta parte del valor absoluto del producto mixto de tres aristas con origen común:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & a-1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{|9-a|}{6}.$$

Como $V = 1$, tenemos $|9-a| = 6$, así que inicialmente $a = 3$ o $a = 15$.

Comprobamos la condición de longitud máxima de las aristas. Para $a = 3$, las longitudes de las seis aristas son

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{5}, \quad 3, \quad \sqrt{12}, \quad \sqrt{14}, \quad \sqrt{5},$$

todas menores que 10. Para $a = 15$, ya la arista P_1P_4 mide

$$\sqrt{(3-1)^2 + (15-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{204} > 10,$$

por lo que ese valor no es posible. **Conclusión.** El único valor compatible con ambas condiciones es $a = 3$.

b) Vértices del paralelepípedo

Las tres aristas que parten de P_1 son

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1), \quad \overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (3 - 1, 3 - 1, 3 - 1) = (2, 2, 2).$$

Los ocho vértices se obtienen sumando a P_1 ninguna, una, dos o las tres aristas:

$$\begin{aligned}P_1 &= (1, 1, 1), & P_2 &= (2, 1, 0), & P_3 &= (1, 3, 2), & Q &= (3, 3, 3), \\ P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3} &= (2, 3, 1), & P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1Q} &= (4, 3, 2), \\ P_1 + \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_1Q} &= (3, 5, 4), & P_1 + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_1Q} &= (4, 5, 3).\end{aligned}$$

Conclusión. Los ocho puntos son $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(4, 3, 2)$, $(3, 5, 4)$ y $(4, 5, 3)$.

Pregunta B.4 - Probabilidad

a) Puntuación 10 y puntuación impar

Hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados equiprobables. En la tabla, las filas indican el resultado del dado azul y las columnas el del dado rojo; cada casilla muestra la puntuación:

Azul \ Rojo	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	8	10	12	14
3	4	5	6	7	8	9
4	6	8	10	12	14	16
5	6	7	8	9	10	11
6	8	10	12	14	16	18

La puntuación 10 aparece en cuatro resultados: (2, 4), (4, 3), (5, 5) y (6, 2). Por tanto,

$$P(\text{puntuación 10}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Si el dado azul es par, la puntuación es par porque se suma un número par al doble del resultado rojo. Si el azul es impar, la puntuación será impar exactamente cuando el rojo sea par. Hay $3 \cdot 3 = 9$ resultados de este tipo. **Conclusión.** $P(\text{puntuación impar}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

b) Probabilidades condicionadas a la puntuación

La puntuación 8 aparece en cinco resultados: (2, 3), (3, 5), (4, 2), (5, 3) y (6, 1). Tres de ellos corresponden a un resultado par en el dado azul. Como estos cinco resultados son equiprobables,

$$P(\text{azul par} \mid \text{puntuación 8}) = \frac{3}{5}.$$

Para la segunda probabilidad, si el azul es par la puntuación siempre es par; si el azul es impar, la puntuación es par exactamente cuando el rojo es impar. De los 36 resultados, hay 18 con azul par y otros 9 con azul impar y rojo impar. En total, hay 27 puntuaciones pares. Entre ellas, el rojo es impar en $9 + 9 = 18$ resultados. **Conclusión.** $P(\text{rojo impar} \mid \text{puntuación par}) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.