

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2021–2022 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven las diez preguntas de las dos opciones del examen.

Bloque A

Ejercicio A.1 · Determinante y sistema matricial

a) Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Para la matriz dada,

$$\det A = \begin{vmatrix} -a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4a.$$

Así, A es invertible exactamente cuando $a \neq 0$.

b) Para $a = 1$, calculamos

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

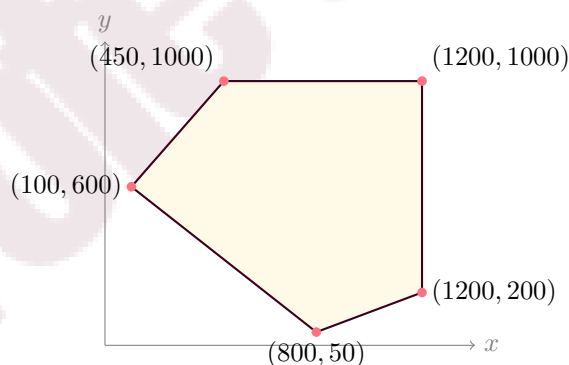
El sistema $(A - B)X = Y$ queda $-2x = 1$, $x - 2y + z = 0$ y $-z = 2$. De la primera y tercera ecuaciones, $x = -1/2$ y $z = -2$; sustituyendo en la segunda, $y = -5/4$.

$$A \text{ es invertible si } a \neq 0; \quad X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ -2 \end{pmatrix} \quad (a = 1).$$

Ejercicio A.2 · Región factible y mínimo

Las restricciones definen la intersección de cinco semiplanos. Para dibujar la región, primero trazamos sus rectas frontera y seleccionamos la zona que satisface simultáneamente las desigualdades. Las intersecciones factibles son

$$(100, 600), \quad (450, 1000), \quad (1200, 1000), \quad (1200, 200), \quad (800, 50).$$



La función objetivo es lineal, de modo que sus extremos se alcanzan en los vértices. Evaluamos $f(x, y) = 2x + y$:

(x, y)	(100, 600)	(450, 1000)	(1200, 1000)	(1200, 200)	(800, 50)
$2x + y$	800	1900	3400	2600	1650

$$f_{\min} = 800 \text{ en el punto } (100, 600).$$

Ejercicio A.3 · Continuidad y área entre curvas

a) La única posible discontinuidad de h está en el punto donde cambia de expresión, $x = 1$. La rama f toma el valor $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$; el límite por la derecha es $g(1) = -1 + a + 3 = a + 2$. Para que coincidan, $a + 2 = 0$, luego $a = -2$.

b) Para $a = 2$, los puntos de corte de f y g satisfacen

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3 \iff 2x(x - 3) = 0,$$

por lo que $x = 0$ y $x = 3$. Entre esos valores $g(x) - f(x) = -2x^2 + 6x \geq 0$, así que g queda por encima de f . El área es

$$A = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = 9.$$

$$a = -2; \quad A = 9 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicio A.4 · Sucesos complementarios

Como $E = A \cup B$ es el espacio muestral, $P(A \cup B) = 1$. Usamos la fórmula de la unión para hallar $P(A)$:

$$1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + 0,7 - 0,2,$$

de donde $P(A) = 0,5$ y, por tanto, $P(A^c) = 0,5$.

Por las leyes de De Morgan, $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$. Luego

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

$$P(A^c) = 0,5; \quad P(A^c \cup B^c) = 0,8.$$

Ejercicio A.5 · Estimación de una proporción

a) El intervalo $(0,2, 0,3)$ es simétrico respecto de su estimación puntual. Por tanto, la proporción muestral es su punto medio, y el error máximo es la semiapertura:

$$\hat{p} = \frac{0,2 + 0,3}{2} = 0,25, \quad E = \frac{0,3 - 0,2}{2} = 0,05.$$

b) Para la misma confianza del 95%, el error máximo de una proporción se calcula con $E = z_{0,975} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$. Sustituyendo $z_{0,975} = 1,96$, $\hat{p} = 0,25$ y $n = 700$:

$$E = 1,96 \sqrt{\frac{0,25 \cdot 0,75}{700}} \approx 0,0321.$$

$$\hat{p} = 0,25, \quad E_{95\%} = 0,05 \text{ en el intervalo dado; } E_{n=700} \approx 0,0321.$$

Bloque B

Ejercicio B.1 · Discusión y resolución de un sistema

La matriz de coeficientes y su determinante son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 - a^2.$$

Si $a \neq \pm 1$, el determinante es no nulo y el sistema es compatible determinado.

Para $a = 1$, la primera y la tercera ecuación coinciden, mientras que la segunda añade una condición independiente. Los rangos de A y de la ampliada son ambos 2, menor que el número de incógnitas; por tanto, es compatible indeterminado. Sus ecuaciones dan $x = z = \lambda$ e $y = 2 - 2\lambda$.

Para $a = -1$, la primera y la tercera ecuación tienen el mismo lado izquierdo, pero términos independientes distintos: el sistema es incompatible. En concreto, exigen simultáneamente $x - y + z = 2$ y $x + y + z = 2$, de donde $y = 0$; junto con la segunda ecuación $x + z = 0$, esto contradice $x + z = 2$.

Para el apartado b), con $a = 0$, la segunda ecuación da $x = 0$; la primera da $z = 2$, y la tercera determina $y = 0$.

$$a \neq \pm 1 : \text{SCD}; \quad a = 1 : \text{SCI}, (x, y, z) = (\lambda, 2 - 2\lambda, \lambda); \quad a = -1 : \text{SI}; \quad a = 0 : (0, 0, 2).$$

Ejercicio B.2 · Parámetros y asíntotas

a) La función es $f(x) = ax + b/x$, con $x \neq 0$. Sus condiciones en $x = 2$ son

$$2a + \frac{b}{2} = 4, \quad f'(2) = a - \frac{b}{4} = 0.$$

De la segunda ecuación, $b = 4a$. Al sustituir en la primera queda $4a = 4$, luego $a = 1$ y $b = 4$.

b) Para $g(x) = x + 1/x$, el dominio excluye $x = 0$. Como $1/x$ diverge al aproximarse a cero, $x = 0$ es una asíntota vertical. Además, $g(x) - x = 1/x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, por lo que $y = x$ es una asíntota oblicua en ambos extremos. No hay horizontal, pues $g(x) \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

$$a = 1, \quad b = 4; \quad g : x = 0 \text{ vertical}, \quad y = x \text{ oblicua.}$$

Ejercicio B.3 · Beneficio y coste medio

a) El beneficio es el ingreso menos el coste. Como $I(x) = x(170 - 0,85x)/5$ y $C(x) = 10 + 2x + x^2$ (ambas cantidades en miles de euros),

$$B(x) = I(x) - C(x) = 32x - 1,17x^2 - 10.$$

La demanda cumple $x \geq 0$. Esta parábola es cóncava porque el coeficiente de x^2 es negativo; su máximo se alcanza donde $B'(x) = 0$:

$$B'(x) = 32 - 2,34x = 0 \implies x = \frac{1600}{117} \approx 13,68.$$

La segunda derivada es $B''(x) = -2,34 < 0$, lo que confirma que es un máximo. El beneficio correspondiente es

$$B\left(\frac{1600}{117}\right) = \frac{24430}{117} \approx 208,80 \text{ miles de euros.}$$

b) El coste medio no debe superar 10 miles de euros por cada mil litros (equivalente a 10 euros por litro). Para $x > 0$:

$$\frac{C(x)}{x} = x + 2 + \frac{10}{x} \leq 10 \iff x^2 - 8x + 10 \leq 0.$$

Las raíces son $4 \pm \sqrt{6}$, y como la parábola abre hacia arriba, la desigualdad se cumple entre ellas:

$$4 - \sqrt{6} \leq x \leq 4 + \sqrt{6}.$$

$$x_{\max} \approx 13,68 \text{ miles de litros}; \quad B_{\max} \approx 208,80 \text{ miles de euros.}$$

$$x \in [1,55, 6,45] \text{ miles de litros para que el coste medio no supere el límite.}$$

Ejercicio B.4 · Probabilidad total y Bayes

Sean A , B y C los sucesos «envía Ana», «envía Berta» y «envía Carla», y sea N que la invitación no llega. Las probabilidades de cada remitente son 0,3, 0,4 y 0,3, y las probabilidades de error condicionado a cada una son 0,02, 0,03 y 0,01.

Los caminos incompatibles que acaban en una invitación no entregada se suman:

$$P(N) = 0,3(0,02) + 0,4(0,03) + 0,3(0,01) = 0,021.$$

Para averiguar quién la envió, aplicamos Bayes:

$$P(A | N) = \frac{P(A)P(N | A)}{P(N)} = \frac{0,3(0,02)}{0,021} = \frac{2}{7} \approx 0,2857.$$

$$P(N) = 0,021; \quad P(A | N) = \frac{2}{7} \approx 0,2857.$$

Ejercicio B.5 · Intervalo y nivel de confianza

a) El intervalo de confianza es simétrico alrededor de la media muestral, así que esta es el punto medio de sus extremos:

$$\bar{x} = \frac{157,125 + 182,875}{2} = 170.$$

b) La semiamplitud del intervalo es $E = 12,875$. Con $n = 9$ y $\sigma = 15$, su relación con el valor crítico es $E = z_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$; por tanto,

$$z_{1-\alpha/2} = \frac{12,875}{15/3} = 2,575.$$

Este valor crítico deja aproximadamente 0,005 en cada cola, luego el nivel de confianza central es del 99%.

$$\bar{x} = 170; \quad \text{nivel de confianza} = 99\%.$$