

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2019

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Rango y matriz inversa

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Discusión del rango de A

La matriz A tiene tres filas, así que su rango no puede superar 3. Para que tenga rango 3 basta con que alguno de sus menores de orden 3 sea distinto de cero. Calculamos los menores formados por cada terna de columnas:

Columnas	Determinante del menor
1, 2, 3	$(a-1)(a+2)$
1, 2, 4	$(a-1)(a+2)$
1, 3, 4	$(a-1)(a+2)$
2, 3, 4	0

Por ejemplo, el primero se obtiene como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = (a^2 - 4) - 3(a+2) + 4(a+2) = a^2 + a - 2 = (a-1)(a+2).$$

Si $a \neq 1, -2$, este menor no se anula y, por tanto, $\text{rg}(A) = 3$. Para $a = 1$ o $a = -2$, todos los menores de orden 3 son nulos y el rango es como máximo 2. En esos casos comprobamos el menor de las dos primeras filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 3,$$

que vale -2 si $a = 1$ y -5 si $a = -2$. El rango es entonces al menos 2, y queda fijado en 2. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $a \neq 1, -2$, y $\text{rg}(A) = 2$ si $a = 1$ o $a = -2$.

b) Inversa de AM para $a = 0$

Al multiplicar A por M , las columnas de AM son la primera, la segunda y la cuarta columna de A . Para $a = 0$:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = B.$$

Una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. En este caso,

$$\det B = -2 \neq 0,$$

así que podemos calcularla mediante $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{Adj}(B)$:

$$\text{Cof}(B) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(B) = \text{Cof}(B)^T = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La comprobación por multiplicación da $BB^{-1} = I_3$. **Conclusión.** $(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ para $a = 0$.

Opción A - Ejercicio 2. Función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

El dominio es $x > 0$, tal como exige el logaritmo y como indica el enunciado.

a) Asíntota horizontal

Una asíntota horizontal en $+\infty$ existe si el límite de la función en ese extremo es finito. Aplicando la regla de L'Hôpital al cociente (que presenta forma ∞/∞):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$. En el extremo $x \rightarrow 0^+$ del dominio, haciendo $x = e^{-t}$ con $t \rightarrow +\infty$ se obtiene $\ln(x)/x = -te^t \rightarrow -\infty$; tampoco hay asíntota horizontal en ese extremo. **Conclusión.** La curva tiene la asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

b) Tangente horizontal y extremo relativo

La tangente es horizontal cuando la derivada se anula. Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ en el dominio, resolvemos $1 - \ln x = 0$, de donde $x = e$. El punto de la curva es

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e},$$

así que la tangente horizontal se encuentra en $(e, \frac{1}{e})$. Para clasificarlo, observamos que $f'(x) > 0$ si $0 < x < e$ y $f'(x) < 0$ si $x > e$. La función pasa de creciente a decreciente, por lo que allí tiene un máximo relativo. **Conclusión.** El punto pedido es $(e, \frac{1}{e})$ y es un máximo relativo.

c) Área del recinto

La curva corta al eje X cuando $\ln x = 0$, es decir, en $x = 1$. En $[1, e]$ se cumple $\ln x \geq 0$, por lo que la función queda sobre el eje y el área es la integral de f entre los puntos de corte 1 y e :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

Usamos la sustitución $u = \ln x$, $du = dx/x$; así, una primitiva es $\frac{1}{2}(\ln x)^2$:

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. El área del recinto es $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 3. Rectas y planos

Escribimos la primera recta en forma paramétrica, tomando como parámetro común t :

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{d}_r = (2, -2, 1).$$

La recta s pasa por $Q = (2, -5, 1)$ y tiene vector director $\vec{d}_s = (-1, 0, -1)$.

a) Posición relativa

Los vectores directores no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Para comprobar si son coplanarias calculamos el producto mixto de sus directores y del vector que une un punto de r , $P = (1, 3, 0)$, con Q :

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= Q - P = (2 - 1, -5 - 3, 1 - 0) = (1, -8, 1), \\ (\vec{d}_r \times \vec{d}_s) \cdot \vec{PQ} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = (2, 1, -2) \cdot (1, -8, 1) = -8 \neq 0. \end{aligned}$$

El producto mixto no nulo indica que los dos directores y $\vec{PQ}$ no son coplanarios; por ello, las rectas son alabeadas. **Conclusión.** Las rectas r y s son alabeadas.

b) Plano paralelo a r que contiene a s

El plano debe contener el vector $\vec{d}_s$ y ser paralelo a r , por lo que también contiene $\vec{d}_r$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial de ambos directores, ya que es perpendicular a los dos:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2, 1, -2).$$

Usamos el punto $Q = (2, -5, 1)$ de s y la forma punto-normal $\vec{n} \cdot ((x, y, z) - Q) = 0$:

$$2(x - 2) + (y + 5) - 2(z - 1) = 0.$$

Conclusión. Un plano que cumple las condiciones es $2x + y - 2z + 3 = 0$.

c) Plano perpendicular a r por el origen

Si un plano es perpendicular a una recta, un vector director de la recta puede utilizarse como vector normal del plano. Por tanto, tomamos $\vec{n} = (2, -2, 1)$ y lo hacemos pasar por el origen:

$$2x - 2y + z = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $2x - 2y + z = 0$.

Opción A - Ejercicio 4. Distribución binomial

La probabilidad de supervivencia de cada pez durante más de cinco años es $p = 0,1$; la de no sobrevivir es $q = 1 - p = 0,9$. Contamos supervivientes entre peces independientes, por lo que el número de supervivientes en n peces sigue una binomial $X \sim \text{Bin}(n, 0,1)$.

a) Diez peces: al menos dos supervivientes

El suceso pedido es $X \geq 2$. Para simplificar, usamos el complementario: que sobreviva al menos dos peces es lo contrario de que sobrevivan cero o uno. La probabilidad binomial es

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Con $n = 10$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10} - \binom{10}{1} (0,1)^1 (0,9)^9 \\ &= \frac{2639010709}{10^{10}} = 0,2639010709. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad es 0,2639010709, aproximadamente un 26,39 %.

b) Doscientos peces: aproximación normal

Para $X \sim \text{Bin}(200, 0,1)$, la aproximamos por una normal con media y desviación típica

$$\mu = np = 20, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{18}.$$

Aplicamos la corrección de continuidad: el suceso discreto $X \geq 10$ se aproxima por $Y \geq 9,5$, donde $Y \sim N(20, \sqrt{18})$. Al tipificar,

$$z = \frac{9,5 - 20}{\sqrt{18}} \approx -2,47.$$

Por simetría de la normal estándar y usando la tabla, $P(Z \geq -2,47) = P(Z \leq 2,47) = 0,9932$. **Conclusión.** La probabilidad aproximada de que sobrevivan al menos 10 peces es 0,9932, es decir, un 99,32 %.

Opción B - Ejercicio 1. Sistema de precios

Llamamos b , r y p a los precios, en euros, de un bocadillo, un refresco y una bolsa de patatas. La cuenta incluye un bocadillo y una bolsa de más, por lo que la devolución de 4 euros proporciona la ecuación $b + p = 4$. La cantidad correcta cuesta entonces $19 - 4 = 15$ euros.

$$\begin{cases} 3b + 2r + 2p = 15 & \text{(compra correcta),} \\ b + p = 4 & \text{(importe devuelto),} \\ 0,6(b + r) = 3 & \text{(oferta con descuento del 40 \%).} \end{cases}$$

En la última ecuación se paga el 60 % del precio original del bocadillo y el refresco. Simplificándola, $b + r = 5$. Por tanto,

$$p = 4 - b, \quad r = 5 - b.$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$3b + 2(5 - b) + 2(4 - b) = 15 \implies 18 - b = 15 \implies b = 3.$$

$$r = 5 - 3 = 2, \quad p = 4 - 3 = 1.$$

Conclusión. Un bocadillo cuesta 3 euros, un refresco 2 euros y una bolsa de patatas 1 euro.

Opción B - Ejercicio 2. Dominio y monotonía

a) Dominio

La raíz cuadrada exige que el radicando sea no negativo. Factorizamos:

$$4x^2 - x^4 = x^2(4 - x^2) \geq 0.$$

Como $x^2 \geq 0$ y es positivo salvo en $x = 0$, la condición se cumple para $4 - x^2 \geq 0$, es decir, $-2 \leq x \leq 2$; el punto $x = 0$ también queda incluido. **Conclusión.** El dominio es $[-2, 2]$.

b) Crecimiento y decrecimiento

En el interior del dominio donde $f(x) > 0$ derivamos para conocer el signo de la pendiente:

$$f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{2x(2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}}.$$

Los puntos que separan los intervalos son las raíces del numerador, $x = 0, \pm\sqrt{2}$, y los extremos del dominio, $x = \pm 2$; además, la derivada no está definida en $x = 0$ ni en los extremos. En cada intervalo interior el denominador es positivo, de modo que el signo depende de $x(2 - x^2)$:

Intervalo	Valor de prueba y signo de $x(2 - x^2)$	Comportamiento
$(-2, -\sqrt{2})$	$x = -\frac{3}{2} : (-) \cdot (-) > 0$	creciente
$(-\sqrt{2}, 0)$	$x = -1 : (-) \cdot (+) < 0$	decreciente
$(0, \sqrt{2})$	$x = 1 : (+) \cdot (+) > 0$	creciente
$(\sqrt{2}, 2)$	$x = \frac{3}{2} : (+) \cdot (-) < 0$	decreciente

La derivada cambia de positiva a negativa en $x = \pm\sqrt{2}$, donde se alcanzan máximos de valor 2. En $x = 0$ la función está definida y vale 0; pasa de decrecer a crecer, por lo que tiene un mínimo relativo. **Conclusión.** La función crece en $(-2, -\sqrt{2})$ y $(0, \sqrt{2})$, y decrece en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 2)$.

c) Límites laterales en $x = 0$

Para $x \neq 0$ escribimos

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2(4 - x^2)}}{x} = \frac{|x|}{x} \sqrt{4 - x^2}.$$

A la izquierda de cero, $|x|/x = -1$; a la derecha, $|x|/x = 1$. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Conclusión. Los límites laterales son -2 y 2 , respectivamente.

Opción B - Ejercicio 3. Distancia, proyección y simetría

El plano π tiene ecuación general $2x + 3y + 4z - 36 = 0$, de modo que un vector normal es $\vec{n} = (2, 3, 4)$. El punto es $A = (2, 1, 0)$.

a) Distancia de A a π

Para un plano $ax + by + cz + d = 0$ y un punto $A(x_0, y_0, z_0)$, la distancia es

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos los coeficientes del plano y las coordenadas de A :

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 36|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

Conclusión. La distancia del punto al plano es $\sqrt{29}$.

b) Punto del plano más próximo a A

El punto más cercano es la proyección ortogonal H de A sobre el plano; por ello, H se encuentra sobre la recta normal que pasa por A . Si $\vec{n} = (a, b, c)$ y el plano es $ax + by + cz + d = 0$, la proyección viene dada por

$$H = A - \frac{\vec{n} \cdot A + d}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $\vec{n} \cdot A - 36 = 4 + 3 - 36 = -29$ y $\|\vec{n}\|^2 = 29$, luego

$$H = (2, 1, 0) - \frac{-29}{29}(2, 3, 4) = (2, 1, 0) + (2, 3, 4) = (4, 4, 4).$$

Se comprueba que $2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 36$, así que $H \in \pi$. **Conclusión.** El punto del plano más próximo a A es $H = (4, 4, 4)$.

c) Punto simétrico respecto al plano

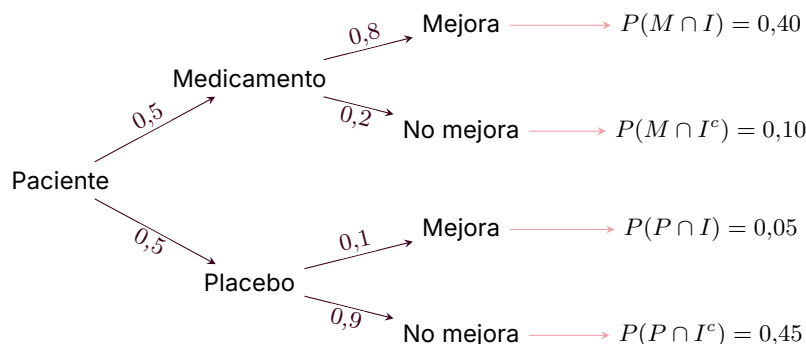
La proyección H es el punto medio del segmento que une A con su simétrico A' . Por tanto, $A' = 2H - A$:

$$A' = 2(4, 4, 4) - (2, 1, 0) = (6, 7, 8).$$

Conclusión. El simétrico de A respecto a π es $(6, 7, 8)$.

Opción B - Ejercicio 4. Probabilidad total y Bayes

Definimos M : «el paciente recibe el medicamento»; P : «recibe placebo»; e I : «mejora». Se sabe que $P(M) = P(P) = 0,5$, $P(I | M) = 0,8$ y $P(I | P) = 0,1$. En el árbol, las probabilidades de un mismo camino se multiplican para obtener la probabilidad conjunta:



a) Probabilidad de que un paciente mejore

La mejoría puede producirse tras el medicamento o tras el placebo; son casos incompatibles, por lo que sumamos las probabilidades de esos dos caminos:

$$P(I) = P(M)P(I | M) + P(P)P(I | P) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45.$$

Conclusión. La probabilidad de mejoría es 0,45, es decir, un 45 %.

b) Probabilidad de que mejorara con el medicamento

Ahora conocemos que el paciente mejoró y queremos averiguar qué tratamiento recibió; aplicamos Bayes para invertir el condicionamiento:

$$P(M | I) = \frac{P(M \cap I)}{P(I)} = \frac{P(M)P(I | M)}{P(I)} = \frac{0,5 \cdot 0,8}{0,45} = \frac{0,4}{0,45} = \frac{8}{9} \approx 0,8889.$$

Conclusión. Sabiendo que mejoró, la probabilidad de que recibiera el medicamento es $\frac{8}{9}$, aproximadamente un 88,89 %.