

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se desarrollan todas para que el material sirva para repasar el temario completo.

A.1. Ejemplos de matrices y discusión de sistemas

Las dos primeras filas son siempre $r_1 = (1, 1, 1, 1)$ y $r_2 = (1, 2, 3, 4)$; ningún elemento de la tercera fila puede ser cero. Las tres primeras columnas son los coeficientes y la última contiene los términos independientes.

a) Tercera fila combinación lineal. Tomamos $r_3 = r_1 + r_2 = (2, 3, 4, 5)$; todos sus elementos son no nulos y la relación pedida queda satisfecha:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Filas linealmente independientes. Elegimos $r_3 = (1, 1, 2, 3)$. El menor de las tres primeras columnas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

por lo que $\text{rg}(A) = 3$ y las tres filas son independientes.

c) Sistema compatible determinado. Usamos el mismo ejemplo. Su matriz de coeficientes tiene determinante 1, así que su rango es 3, igual al número de incógnitas; por Rouché-Frobenius, el sistema es SCD.

d) Sistema compatible indeterminado. Volvemos a tomar $r_3 = r_1 + r_2 = (2, 3, 4, 5)$. Las dos primeras filas de coeficientes son independientes, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, y la tercera es su suma. La misma dependencia se cumple en la ampliada, de modo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es SCI.

e) Sistema incompatible. Tomamos ahora $r_3 = (2, 3, 4, 6)$. En la matriz de coeficientes la tercera fila sigue siendo la suma de las dos primeras, así que su rango es 2. Sin embargo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

en las columnas primera, segunda y ampliada; por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$. El sistema es SI. También se ve en las ecuaciones: al sumar las dos primeras, el término independiente sería $1 + 4 = 5$, no 6.

A.2. Función definida a trozos

Para $x < 1$, $x \neq -1$, simplificamos

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

El otro tramo es $\frac{x^2+1}{4x}$. El dominio total es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$: el primer tramo excluye $x = -1$ y el segundo sólo se usa para $x \geq 1$, donde $4x \neq 0$.

a) Cálculo de $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$

Como $0 < 1$, usamos el primer tramo:

$$f(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1.$$

La composición significa evaluar f en el resultado anterior. Puesto que $f(0) = 1$ y el segundo tramo incluye $x = 1$,

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = \frac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. $f(0) = 1$ y $(f \circ f)(0) = \frac{1}{2}$.

b) Continuidad, derivabilidad y extremo en $x = 1$

Para comprobar continuidad, comparamos los límites laterales con el valor de la función. Por el tramo izquierdo simplificado,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Por el tramo derecho y por el valor definido en $x = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Los tres valores coinciden, por lo que f es continua en $x = 1$.

Para la derivabilidad calculamos las derivadas laterales. En el tramo izquierdo $f'(x) = -1/(x+1)^2$, así que

$$f'_-(1) = -\frac{1}{4}.$$

En el tramo derecho,

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2}, \quad f'_+(1) = 0.$$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en $x = 1$.

Para clasificar el punto, estudiamos el signo de las derivadas a ambos lados: a la izquierda $-1/(x+1)^2 < 0$ y a la derecha $\frac{1}{4}(1 - 1/x^2) > 0$ para $x > 1$. La función pasa de decrecer a crecer; por tanto, $x = 1$ es un mínimo relativo y su valor es $f(1) = 1/2$. **Conclusión.** f es continua, pero no derivable en $x = 1$; allí tiene un mínimo relativo de valor $1/2$.

c) Asíntotas

La forma simplificada del primer tramo permite estudiar el posible punto problemático $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, $x = -1$ es asíntota vertical.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, seguimos en el primer tramo y $f(x) = 1/(x+1)$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ hacia $-\infty$. Hacia $+\infty$ el segundo tramo se puede escribir

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4x},$$

y tiende a $+\infty$, por lo que no hay asíntota horizontal en ese extremo. Comprobamos la oblicua calculando primero su pendiente y luego su ordenada:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) = 0.$$

Conclusión. Las asíntotas son $x = -1$ (vertical), $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$ (horizontal) e $y = \frac{x}{4}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ (oblicua).

A.3. Recta y geometría en el espacio

La recta del enunciado pasa por $R = (2, 0, -1)$ y tiene vector director $\vec{d} = (-1, 1, 0)$. En forma paramétrica,

$$r : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t, \\ z = -1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Plano que contiene a P y a r

Usamos un punto de la recta y el vector que lo une con P :

$$P - R = (3 - 2, 3 - 0, 0 - (-1)) = (1, 3, 1).$$

Un vector normal del plano es el producto vectorial de $\vec{d}$ y $P - R$; el producto vectorial es perpendicular a ambos:

$$\vec{n} = \vec{d} \times (P - R) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -4).$$

El plano pasa por R , así que

$$(1, 1, -4) \cdot (x - 2, y, z + 1) = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $x + y - 4z - 6 = 0$.

b) Simétrico de P respecto de r

Primero proyectamos P ortogonalmente sobre r . El parámetro del pie $H = R + t\vec{d}$ se obtiene imponiendo que $P - H$ sea perpendicular a $\vec{d}$:

$$t = \frac{(P - R) \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} = \frac{(1, 3, 1) \cdot (-1, 1, 0)}{(-1)^2 + 1^2} = 1.$$

Así, $H = R + \vec{d} = (1, 1, -1)$. El pie es el punto medio entre P y su simétrico P' , por lo que

$$P' = 2H - P = 2(1, 1, -1) - (3, 3, 0) = (-1, -1, -2).$$

Conclusión. El simétrico de P respecto de la recta es $P' = (-1, -1, -2)$.

c) Triángulo rectángulo de área $3/\sqrt{2}$

Si el ángulo recto está en A y AB está contenido en r , entonces AP debe ser perpendicular a la dirección de r . Por ello, A es el pie de la perpendicular calculado en el apartado anterior: $A = H = (1, 1, -1)$. La altura vale

$$AP = \|P - H\| = \|(2, 2, 1)\| = 3.$$

El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de los catetos. Si $|AB| = b$, entonces

$$\frac{1}{2} AP b = \frac{3}{\sqrt{2}} \implies \frac{3}{2} b = \frac{3}{\sqrt{2}} \implies b = \sqrt{2}.$$

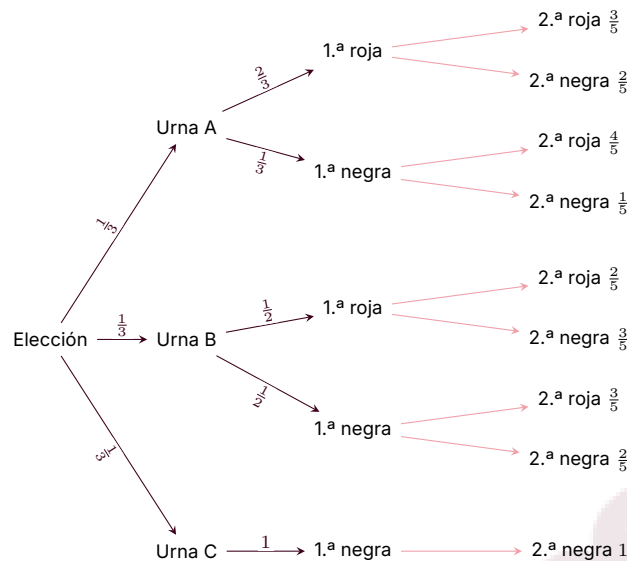
Como $\|\vec{d}\| = \sqrt{2}$, la distancia entre los parámetros de A y B debe ser 1. El punto A corresponde a $t = 1$, así que podemos tomar B para $t = 2$:

$$B = (2 - 2, 2, -1) = (0, 2, -1).$$

Se verifica que $\overrightarrow{AP} = (2, 2, 1)$ y $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, cuyo producto escalar es $-2 + 2 = 0$; por tanto, el ángulo recto está en A . **Conclusión.** Una pareja válida es $A = (1, 1, -1)$ y $B = (0, 2, -1)$.

A.4. Extracciones sin reemplazamiento

Cada urna se elige con probabilidad $1/3$. En cada camino del árbol multiplicamos la probabilidad de elegir la urna por las probabilidades sucesivas de las extracciones; al sumar caminos incompatibles obtenemos la probabilidad del suceso total.



a) Primera bola roja

Aplicamos la probabilidad total, sumando la contribución de cada urna:

$$P(R_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}.$$

Conclusión. La probabilidad de que la primera bola sea roja es $\frac{7}{18}$.

b) Primera roja y segunda negra

Para cada urna multiplicamos las probabilidades de las ramas «elegir urna», «primera roja» y «segunda negra». La composición de la urna cambia tras la primera extracción, porque no se reemplaza la bola:

$$P(R_1 \cap N_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{4}{45} + \frac{1}{10} = \frac{17}{90}.$$

Conclusión. La probabilidad de extraer primero una roja y después una negra es $\frac{17}{90}$.

c) Segunda negra sabiendo que la primera fue roja

Usamos probabilidad condicionada porque conocemos que ocurrió R_1 :

$$P(N_2 | R_1) = \frac{P(R_1 \cap N_2)}{P(R_1)} = \frac{17/90}{7/18} = \frac{17}{35}.$$

Conclusión. La probabilidad pedida es $\frac{17}{35}$.

B.1. Operaciones con matrices

a) Inversa de A

La matriz A es cuadrada. Calculamos su determinante para comprobar si es invertible:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Por tanto, existe A^{-1} . Aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)$ (y calculando la adjunta mediante los cofactores) se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La multiplicación $AA^{-1} = I_3$ verifica el resultado.

b) Cálculo de $C = A^2 - 2I$

Primero multiplicamos A por sí misma y, a continuación, restamos dos veces la identidad:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = A^2 - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

c) Determinante de $D = ABB^t$

Respetamos el orden de los productos. Primero,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Después,

$$D = (AB)B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 9 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La segunda columna es nula; por tanto, el determinante de D es cero. **Conclusión.** $\det(D) = 0$.

B.2. Potencia y energía de una pila

La potencia es $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, con $t > 0$.

a) Límite cuando el tiempo tiende a infinito

La exponencial decreciente domina al factor lineal t . Formalmente, usando L'Hôpital en la forma ∞/∞ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 25te^{-t^2/4} = 25 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t^2/4}} = 25 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t/2)e^{t^2/4}} = 0.$$

Conclusión. Tras mucho tiempo, la potencia generada tiende a cero.

b) Potencia máxima

Para localizar el máximo interior derivamos la potencia y buscamos sus puntos críticos:

$$P'(t) = 25e^{-t^2/4} \left(1 - \frac{t^2}{2}\right).$$

La exponencial nunca es cero, así que $P'(t) = 0$ cuando $1 - t^2/2 = 0$. Como $t > 0$, resulta $t = \sqrt{2}$. El factor entre paréntesis es positivo para $0 < t < \sqrt{2}$ y negativo para $t > \sqrt{2}$; por ello, la potencia crece y después decrece.

$$P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}e^{-1/2} = 25\sqrt{\frac{2}{e}}.$$

Conclusión. La potencia máxima es $25\sqrt{2/e}$ y se alcanza en $t = \sqrt{2}$.

c) Energía producida entre $t = 0$ y $t = 2$

Como $E'(t) = P(t)$ y $E(0) = 0$, integramos la potencia en el intervalo pedido:

$$E(2) = \int_0^2 25te^{-t^2/4} dt.$$

Con el cambio $u = -t^2/4$, se tiene $du = -(t/2)dt$, de modo que $25t dt = -50du$:

$$E(2) = -50[e^u]_0^{-1} = 50(1 - e^{-1}) = 50\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Conclusión. La energía generada hasta $t = 2$ es $50(1 - 1/e)$.

B.3. Paralelogramo y vectores

Los vértices consecutivos son $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 1, 0)$ y $C = (4, 3, -2)$.

a) Recta por el punto medio de AC perpendicular a AC y BC

Calculamos los vectores que definen las dos direcciones:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (4 - 1, 3 - 0, -2 - (-1)) = (3, 3, -1),$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (4 - 2, 3 - 1, -2 - 0) = (2, 2, -2).$$

Un vector perpendicular a ambos es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-4, 4, 0),$$

que podemos simplificar a la dirección $(-1, 1, 0)$. El punto medio de AC es

$$M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-1-2}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right).$$

Con ese punto y el vector director, la recta paramétrica es

$$\ell: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - t, \\ y = \frac{3}{2} + t, \\ z = -\frac{3}{2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Una ecuación paramétrica de la recta es la indicada.

b) Vértice D y área

En un paralelogramo, las diagonales tienen el mismo punto medio, por lo que $A + C = B + D$ y

$$D = A + C - B = (1 + 4 - 2, 0 + 3 - 1, -1 - 2 - 0) = (3, 2, -3).$$

El área es el módulo del producto vectorial de dos lados consecutivos. Calculamos primero

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{BC} = C - B = (2, 2, -2),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = (-4, 4, 0), \quad A = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Conclusión. $D = (3, 2, -3)$ y el área del paralelogramo es $4\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

c) Coseno del ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Usamos $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 5,$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19}.$$

Por tanto,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{5}{\sqrt{57}}.$$

Conclusión. El coseno del ángulo pedido es $\frac{5}{\sqrt{57}}$.

B.4. Sucesos independientes y distribución binomial

Llamamos $\bar{Y}$ al suceso complementario de Y . Como X e Y son independientes, X también es independiente de $\bar{Y}$.

a) Cálculo de $P(Y)$

La independencia permite multiplicar las probabilidades de X y $\bar{Y}$:

$$P(X \cap \bar{Y}) = P(X)P(\bar{Y}).$$

Sustituyendo los datos,

$$0,08 = 0,4(1 - P(Y)) \implies P(\bar{Y}) = 0,2 \implies P(Y) = 0,8.$$

Conclusión. $P(Y) = 0,8$.

b) Probabilidad de la unión

Aplicamos $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$. La independencia da $P(X \cap Y) = P(X)P(Y) = 0,32$:

$$P(X \cup Y) = 0,4 + 0,8 - 0,32 = 0,88.$$

Conclusión. $P(X \cup Y) = 0,88$.

c) Al menos dos éxitos en ocho repeticiones

El éxito es que no ocurra X , cuya probabilidad es $p = 1 - 0,4 = 0,6$. En ocho repeticiones independientes, el número N de éxitos sigue una binomial $N \sim \text{Bin}(8, 0,6)$. «Al menos dos» significa $N \geq 2$; usamos el complementario de cero o un éxito:

$$\begin{aligned} P(N \geq 2) &= 1 - P(N = 0) - P(N = 1) \\ &= 1 - (0,4)^8 - \binom{8}{1}(0,6)(0,4)^7 \\ &= \frac{387297}{390625} = 0,99148032. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad de obtener al menos dos éxitos es $\frac{387297}{390625} \approx 0,99148$.