

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Ecuación matricial y dimensiones

Para aislar X en $AX + B = A^2C$, restamos B y multiplicamos por A^{-1} a la izquierda. Antes comprobamos que A es invertible:

$$\det A = 3 \neq 0, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Calculamos primero las potencias y el producto que aparecen en la ecuación:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -16 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = A^{-1}(A^2C - B) = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

La sustitución da $AX + B = A^2C$, por lo que la matriz satisface la ecuación.

En el apartado b), comparamos dimensiones. Como A es 3×3 y C es 3×2 , el producto AP^t también debe ser 3×2 ; por ello P^t es 3×2 y P es 2×3 . Además, QB debe ser 2×2 para que pueda multiplicarse por la izquierda por C ; como B es 3×2 , resulta que Q es 2×3 .

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}; \quad P, Q \in M_{2 \times 3}.$$

Ejercicio 2 · Región factible y función objetivo

Denotamos por r_1, r_2, r_3, r_4 las rectas frontera de las cuatro restricciones. Sus intersecciones que cumplen todas las desigualdades son:

Rectas que se cortan	Vértice factible
$r_1 : y - 2x = 7, r_2 : -x + 3y = 21$	$(0, 7)$
$r_2 : -x + 3y = 21, r_3 : x + 2y = 19$	$(3, 8)$
$r_3 : x + 2y = 19, r_4 : x + y = 14$	$(9, 5)$

Al sustituirlos en las restricciones, los tres puntos resultan factibles. Las otras parejas de fronteras dan $(1, 9)$, $(\frac{7}{3}, \frac{35}{3})$ y $(\frac{21}{4}, \frac{35}{4})$; se descartan porque violan, respectivamente, la segunda, segunda y tercera desigualdad. La región se prolonga indefinidamente hacia abajo. Para acotar el máximo, combinamos las restricciones segunda y tercera con coeficientes positivos:

$$\frac{2}{5}(-x + 3y) + \frac{7}{5}(x + 2y) = x + 4y \leq \frac{2}{5}(21) + \frac{7}{5}(19) = 35.$$

La igualdad se alcanza en $(3, 8)$, luego $F_{\max} = 35$. No existe mínimo. Desde el vértice $(0, 7)$, consideramos la semirrecta $(t, 7 - t)$ con $t \geq 0$. Los miembros izquierdos de las cuatro restricciones toman los valores $7 - 3t$, $21 - 4t$, $14 - t$ y 7 , que no superan sus cotas. A lo largo de ella,

$$F(t, 7 - t) = 28 - 3t \rightarrow -\infty.$$

Por tanto, F no puede valer 40, pues siempre es menor o igual que 35. En cambio, para $t = \frac{8}{3}$ obtenemos el punto factible $(\frac{8}{3}, \frac{13}{3})$, donde $F = 20$.

Vértices: $(0, 7), (3, 8), (9, 5)$; $F_{\max} = 35$ en $(3, 8)$; F no tiene mínimo.

Bloque B

Ejercicio 3 · Determinación de parámetros, gráfica y área

Para que f tenga un extremo en $x = \frac{1}{3}$, su derivada debe anularse en ese punto. Además, la gráfica pasa por $(-2, -3)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c, \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \implies 2b + 3c = -1,$$

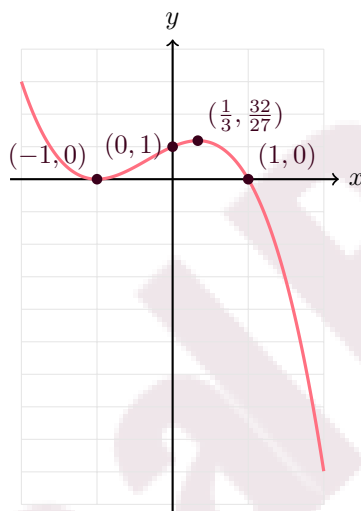
$$f(-2) = -3 \implies 4b - 2c = 6.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $b = 1$ y $c = -1$.

Como g es polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$. Para esbozarla, factorizamos y estudiamos el signo de su derivada:

$$g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1 = (1-x)(x+1)^2, \quad g'(x) = -(3x-1)(x+1).$$

Los cortes con el eje X son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ (en $x = -1$ hay raíz doble); con el eje Y , $(0, 1)$. La derivada es negativa en $(-\infty, -1)$, positiva en $(-1, \frac{1}{3})$ y negativa en $(\frac{1}{3}, \infty)$. Por ello hay un mínimo relativo en $(-1, 0)$ y un máximo relativo en $(\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$.



Entre las dos raíces, $g(x) \geq 0$ porque $(1-x) \geq 0$ y $(x+1)^2 \geq 0$. El área pedida es, por tanto, la integral de g entre -1 y 1 :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

$b = 1, \quad c = -1; \quad \mathcal{A} = \frac{4}{3}.$

Ejercicio 4 · Beneficio de la finca

Como x representa miles de kilogramos y $B(x)$ miles de euros, trabajamos con $x \geq 0$ y

$$B(x) = -0,02x^2 + 1,3x - 15.$$

Los cortes con el eje horizontal se obtienen resolviendo $B(x) = 0$:

$$-0,02x^2 + 1,3x - 15 = 0 \implies x = 15 \text{ o } x = 50.$$

La parábola abre hacia abajo. Es no negativa entre sus raíces, así que no hay pérdidas para $15 \leq x \leq 50$ (y hay beneficio estricto si $15 < x < 50$). Su vértice está en

$$x_v = -\frac{1,3}{2(-0,02)} = 32,5, \quad B(32,5) = 6,125.$$

El beneficio máximo es 6,125 miles de euros, es decir, 6125 euros, al vender 32,5 miles de kilogramos. Para obtener 5000 euros imponemos $B(x) = 5$:

$$-0,02x^2 + 1,3x - 15 = 5 \implies x^2 - 65x + 1000 = 0 \implies x = 25 \text{ o } x = 40.$$

Sin pérdidas: $x \in [15, 50]$; $B_{\max} = 6125 \text{ €}$, $x = 32,5 \text{ mil kg}$; $x = 25 \text{ o } 40 \text{ mil kg para } 5000 \text{ €}$.

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad total y Bayes

Sean A, B, C las procedencias universitarias y N el suceso «no encontrar trabajo». Se conocen $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,1$, $P(N | A) = 0,4$, $P(N | B) = 0,5$ y $P(N) = 0,395$. Por la probabilidad total,

$$0,395 = 0,6(0,4) + 0,3(0,5) + 0,1P(N | C),$$

de donde $P(N | C) = 0,05$. La probabilidad de encontrar trabajo en C es su complementaria, 0,95.

Para la segunda pregunta, sumamos los casos incompatibles $A \cap N$ y $B \cap N$ y dividimos entre $P(N)$:

$$P(A \cup B | N) = \frac{0,6(0,4) + 0,3(0,5)}{0,395} = \frac{78}{79}.$$

$$P(\text{trabajo} | C) = 0,95; \quad P(A \cup B | N) = \frac{78}{79}.$$

Ejercicio 6 · Operaciones con sucesos

De los datos $P(A^c) = \frac{5}{7}$ y $P(B^c) = \frac{2}{3}$ obtenemos $P(A) = \frac{2}{7}$ y $P(B) = \frac{1}{3}$. La fórmula de la unión permite hallar la intersección:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} = \frac{4}{21}.$$

Como $P(A)P(B) = \frac{2}{21} \neq \frac{4}{21}$, los sucesos no son independientes. Tampoco son incompatibles, pues su intersección no es vacía en probabilidad. Además,

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{4}{7},$$

$$P(B | A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{5/7} = \frac{1/3 - 4/21}{5/7} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{No son independientes ni incompatibles; } P(A^c \cap B^c) = \frac{4}{7}; \quad P(B | A^c) = \frac{1}{5}.$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Intervalo para una proporción

La proporción muestral es $\hat{p} = 1425/1500 = 0,95$ y $\hat{q} = 0,05$. Para una proporción, el intervalo de confianza es

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

Con confianza del 97%, $z_{0,985} \approx 2,170$. El error máximo estimado es

$$E = 2,170 \sqrt{\frac{0,95 \cdot 0,05}{1500}} \approx 0,0122,$$

por lo que el intervalo es $(0,9378, 0,9622)$. Para que el error sea inferior a 0,01, despejamos n en la misma fórmula:

$$2,170 \sqrt{\frac{0,95 \cdot 0,05}{n}} < 0,01 \implies n > \frac{2,170^2(0,95)(0,05)}{0,01^2} \approx 2236,73.$$

El menor entero que cumple la condición es 2237.

$$IC_{97\%} \approx (0,9378, 0,9622); \quad n_{\min} = 2237.$$

Ejercicio 8 · Media de una Normal

La desviación típica poblacional es conocida, $\sigma = 3$ días. Para una muestra de tamaño n , el intervalo para la media es $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$. Con $n = 100$, $\bar{x} = 8,1$ y confianza del 97%:

$$8,1 \pm 2,170 \frac{3}{\sqrt{100}} = 8,1 \pm 0,651,$$

que da $(7,449, 8,751)$ días. Para que el error sea menor que un día con confianza del 92%, usamos $z_{0,96} \approx 1,751$:

$$1,751 \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > (1,751 \cdot 3)^2 \approx 27,60.$$

Se necesitan al menos 28 titulados. Finalmente, si $\mu = 7,61$ y $n = 36$, la media muestral sigue $\bar{X} \sim N(7,61, 0,5^2)$. Así,

$$P(\bar{X} > 8) = 1 - \Phi\left(\frac{8 - 7,61}{0,5}\right) = 1 - \Phi(0,78) \approx 0,218.$$

$$IC_{97\%} \approx (7,449, 8,751) \text{ días}; \quad n_{\min} = 28; \quad P(\bar{X} > 8) \approx 0,218.$$