

BLOQUE A

PROBLEMA 1. Un comerciante quiere invertir hasta 1000 euros en la compra de dos tipos de aparatos, A y B, pudiendo almacenar en total hasta 80 aparatos. Cada aparato de tipo A le cuesta 15 euros y lo vende a 22, cada uno del tipo B le cuesta 11 y lo vende a 17 euros. ¿Cuántos aparatos debe comprar de cada tipo para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la siguiente tabla,

Tipo de aparato	Nº de aparatos	Precio compra €/unidad	Precio venta €/unidad	Beneficio
A	x	15	22	$7x$
B	y	11	17	$6y$
Disponibilidad	80	1000 €		

Utilizamos las siguientes incógnitas

x = número de aparatos del tipo A

y = número de aparatos del tipo B

Las restricciones serán:

“quiere invertir hasta 1000 €”; $15x + 11y \leq 1000$

“puede almacenar hasta 80 aparatos”; $x + y \leq 80$

Como x e y representan número de aparatos, la restricción para los valores de estas variables es $x, y \in N$

Los beneficios que obtiene el comerciante serán: $7x + 6y$

Maximizar $z = 7x + 6y$

El problema a resolver es:

$$\text{s.a.} \begin{cases} 15x + 11y \leq 1000 \\ x + y \leq 80 \\ x, y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $15x + 11y \leq 1000$

$15x + 11y = 1000$

x	y
0	$\frac{1000}{11} = 90'90$
$\frac{1000}{15} = 66'66$	0

¿(0,0) cumple?

$15 \cdot 0 + 11 \cdot 0 \leq 1000$ Sí

(b) $x + y \leq 80$

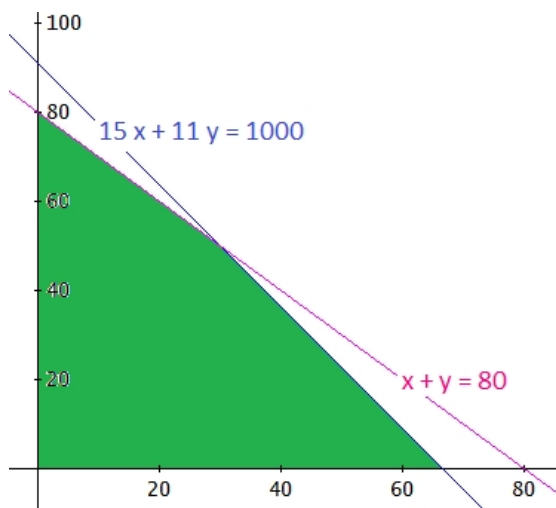
$x + y = 80$

x	y
0	80
80	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \leq 80$ Sí

La representación gráfica será:



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

Son evidentes los vértices $(0, 0)$, $(0, 80)$ y $(66'66, 0)$; calculemos el otro vértice.

De (a) y (b): $(30, 50)$

$$\begin{cases} 15x + 11y = 1000 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

despejando de la segunda ecuación: $y = 80 - x$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $15x + 11(80 - x) = 1000$;

$$15x + 880 - 11x = 1000$$

$$4x = 120$$

$$x = \frac{120}{4} = 30$$

$$\text{Luego, } y = 80 - 30 = 50$$

Los vértices de la región factible son: $(0, 0)$, $(0, 80)$ y $(66'66, 0)$ y $(30, 50)$.

De estos vértices el $(66'66, 0)$ no tiene sus coordenadas naturales, esperemos que el máximo se alcance en otro de los vértices para que el problema tenga una solución sencilla.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$z = 7x + 6y$	
$0, 0$	$7 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$	
$0, 80$	$7 \cdot 0 + 6 \cdot 80 = 480$	
$30, 50$	$7 \cdot 30 + 6 \cdot 50 = 510$	Máximo
$66'66, 0$	$7 \cdot 66'66 + 6 \cdot 0 = 466'62$	

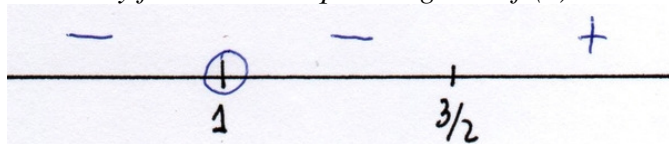
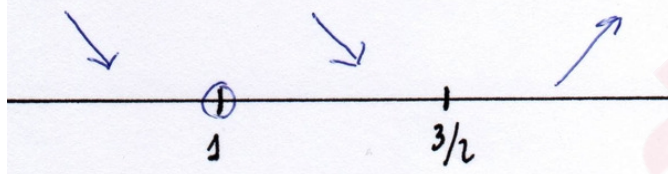
El máximo se alcanza en el punto $(30, 50)$.

Por lo tanto: para maximizar su beneficio debe comprar 30 aparatos del tipo A y 50 del tipo B.

De esta forma el beneficio máximo será de 510€.

BLOQUE A**PROBLEMA 2.** Dibuja la gráfica de la función $y = f(x)$ sabiendo que:

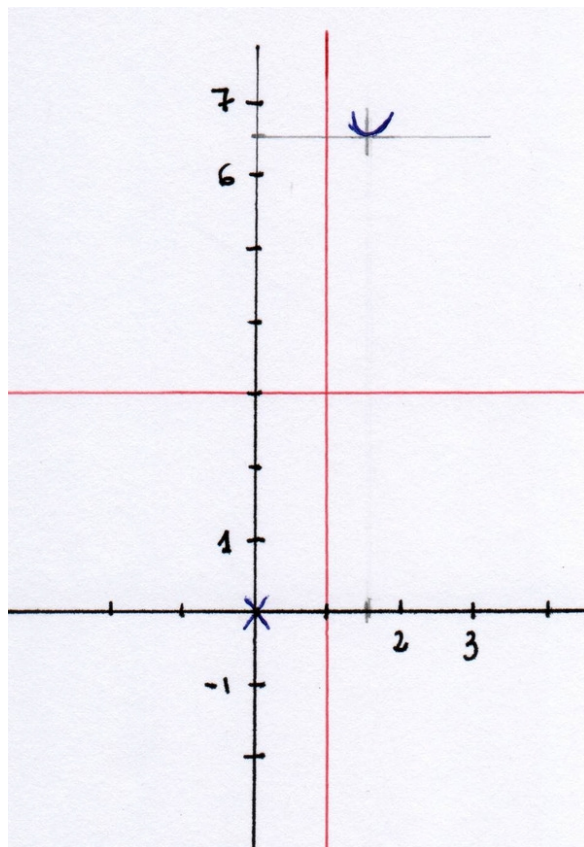
- a) Está definida para todos los valores de x salvo para $x = 1$, siendo la recta $x = 1$ la única asíntota vertical.
- b) La recta $y = 3$ es la única asíntota horizontal.
- c) El único punto de corte con los ejes es el $(0, 0)$
- d) La derivada de la función $y = f(x)$ sólo se anula en $x = 3/2$.
- e) $f'(x) < 0$ en el conjunto $]-\infty, 1[\cup]1, 3/2[$.
- f) $f'(x) > 0$ en el intervalo $]3/2, +\infty[$.
- g) $f(3/2) = 13/2$

*Solución:**Los apartados e y f nos indican que el signo de $f'(x)$ es:**Por lo que el crecimiento y decrecimiento de la función será:*

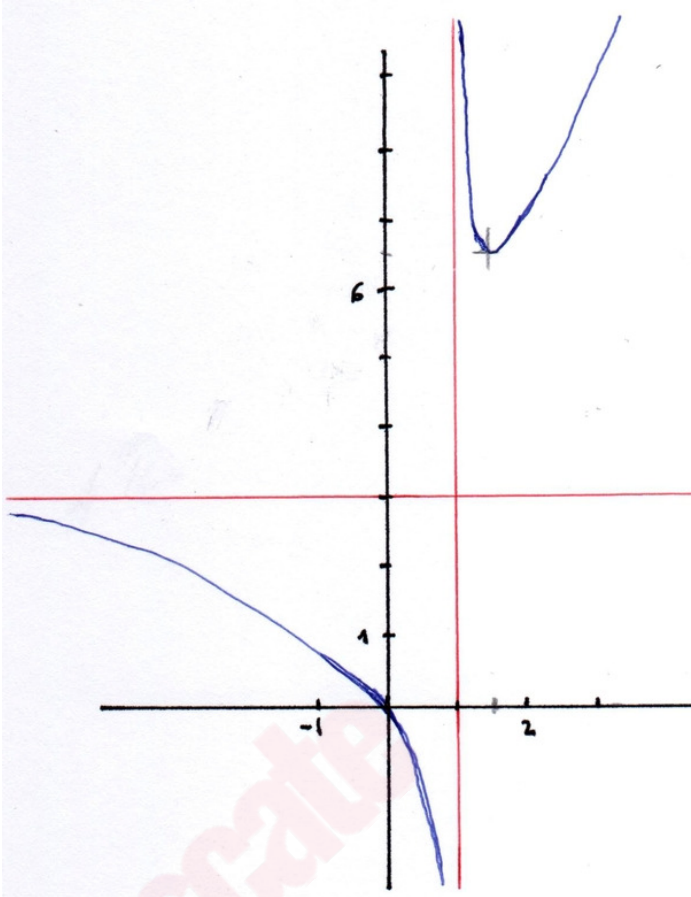
Luego en $x = 3/2$ hay un mínimo relativo de $f(x)$. Según el apartado g, para $x = 3/2$ $f(3/2) = 13/2$, luego el mínimo está en el punto $(3/2, 13/2) = (1.5, 6.5)$

Dibujando en los ejes coordenados:

la asíntota vertical $x = 1$ (en rojo)
 la asíntota horizontal $y = 3$ (en rojo)
 el punto de corte con los ejes coordenados $(0, 0)$
 y el mínimo visto anteriormente $(1.5, 6.5)$,



La representación gráfica (en azul) de la función $y = f(x)$ es:



Tu Profe al Rescate

BLOQUE A

PROBLEMA 3. El 15% de los habitantes de cierta población son socios de un club de futbol y el 3% son pelirrojos. Si los sucesos “ser socio de un club de futbol” y “ser pelirrojo” son independientes, calcula las probabilidades de que al elegir al azar un habitante de esa población, dicho habitante

- Sea pelirrojo y no sea socio de un club de futbol.
- Sea pelirrojo o sea socio de un club de futbol.
- Sea socio de un club de futbol si sabemos que no es pelirrojo.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

F = ser socio de un club de futbol

R = ser pelirrojo

A partir del enunciado del problema sabemos que:

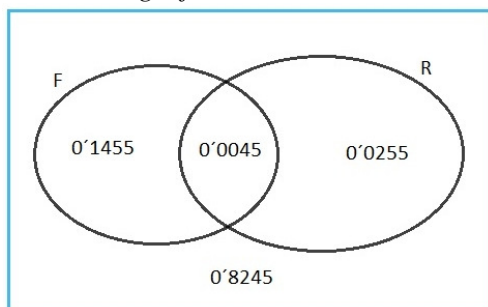
“El 15% de los habitantes de cierta población son socios de un club de futbol” $\rightarrow p(F) = 0.15$

“El 3% “ “ “ “ “ “ “ “ pelirrojos” $\rightarrow p(R) = 0.03$

También sabemos que los sucesos F y R son independientes, por lo tanto:

$$p(F \cap R) = p(F) \cdot p(R) = 0.15 \cdot 0.03 = 0.0045$$

Representando gráficamente los dos sucesos e indicando la probabilidad de cada parte:



Teniendo en cuenta que:

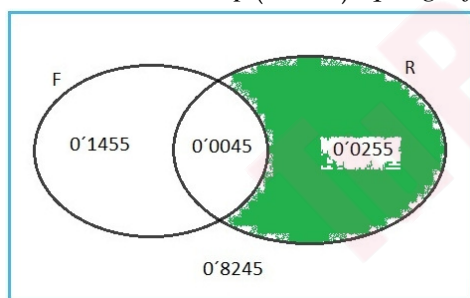
$$0.15 - 0.0045 = 0.1455$$

$$0.03 - 0.0045 = 0.0255$$

$$1 - 0.1455 - 0.0045 - 0.0255 = 0.8245$$

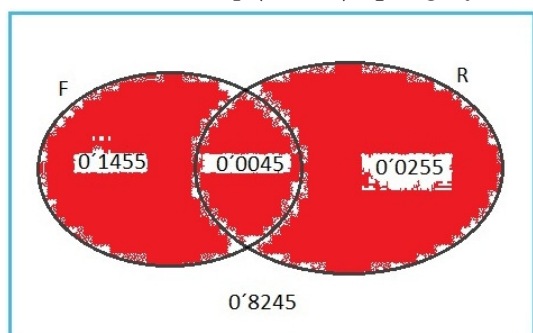
Contestemos a cada uno de los apartados.

a) Debemos calcular $p(R \cap \bar{F})$, que gráficamente es



$$p(R \cap \bar{F}) = 0.0255$$

b) Debemos calcular $p(R \cup F)$, que gráficamente es



$$p(R \cup F) = 0.1455 + 0.0045 + 0.0255 = 0.1755$$

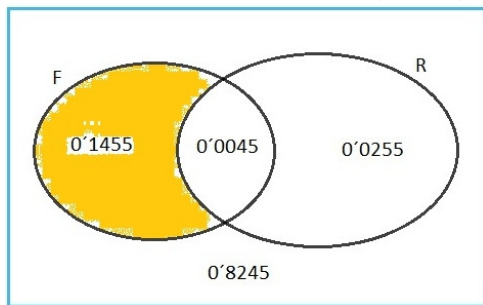
También podemos obtener el resultado a partir de:

$$p(R \cup F) = p(R) + p(F) - p(R \cap F) = 0.15 + 0.03 - 0.0045 = 0.1755$$

c) Debemos calcular $p\left(\frac{F}{\bar{R}}\right)$, por probabilidad condicionada:

$$p\left(\frac{F}{\bar{R}}\right) = \frac{p(F \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} =$$

Calculamos, gráficamente, $p(F \cap \bar{R})$,



$$p(F \cap \bar{R}) = 0'1455$$

y $p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0'03 = 0'97$

Finalmente, $p\left(\frac{F}{\bar{R}}\right) = \frac{p(F \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{0'1455}{0'97} = 0'15$

Tu Profecia al Rescate

BLOQUE B

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ que satisfacen la relación $A X - X A = B$.

Solución:

$A X - X A = B$, sustituyendo cada letra por su matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{operando}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y & 2z \\ -x+3y & 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 2x \\ y-z & 2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y & 2z-2x \\ -x+2y+z & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2y = 2 \\ 2z - 2x = -6 \\ -x + 2y + z = -1 \\ -2y = -2 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación obtenemos: $2y = 2$; $y = 1$ y de la 3ª, $-2y = -2$; $y = 1$. Como hemos obtenido el mismo valor, sabemos que $y = 1$. Sustituyendo el valor de y en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} 2z - 2x = -6 \\ -x + 2 + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z - 2x = -6 \\ -x + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z - x = -3 \\ -x + z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + z = -3 \\ -x + z = -3 \end{cases}$$

Luego, sólo tenemos una ecuación: $-x + z = -3$; $z = x - 3$

Hemos obtenido que el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda - 3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por lo que las matrices pedidas serán: $X(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

BLOQUE B

PROBLEMA 2. Una empresa dispone de 15 comerciales que proporcionan unos ingresos por ventas de 5750 euros mensuales cada uno. Se calcula que por cada nuevo comercial que contrate la empresa los ingresos de cada uno disminuyen en 250 euros. Calcula:

- Los ingresos mensuales de la empresa proporcionados por los 15 comerciales.
- La función que determina los ingresos mensuales que se obtendrían si se contrataran x comerciales más.
- El número total de comerciales que debe tener la empresa para que los ingresos por este medio sean máximos.
- Los ingresos máximos.

Solución:

A partir de los datos del problema podemos construir la siguiente tabla,

Nº de comerciales	Ingresos por ventas(€/comercial y mes)	Ingresos mensuales de la empresa (€)
15	5750	$15 \cdot 5750 = 86250$
$15 + 1$	$5750 - 250 \cdot 1 = 5500$	$16 \cdot 5500 = 88000$
$15 + 2$	$5750 - 250 \cdot 2 = 5250$	$17 \cdot 5250 = 89250$
$15 + x$	$5750 - 250 x$	

Contestemos a cada uno de los apartados.

- Según los cálculos efectuados anteriormente, los 15 comerciales proporcionan a la empresa unos ingresos mensuales de 86250 €

- Llamando $I(x)$ a la función que nos da los ingresos mensuales contratando a x comerciales más

$$I(x) = (15 + x) \cdot (5750 - 250x) = 86250 - 3750x + 5750x - 250x^2 = -250x^2 + 2000x + 86250$$
 Por lo tanto, si se contratarán x comerciales más los ingresos mensuales que se obtendrían serían

$$I(x) = -250x^2 + 2000x + 86250 \quad x \in \mathbb{N}$$

- Busquemos el máximo de la función $I(x)$

$$I'(x) = -500x + 2000$$

$$-500x + 2000 = 0$$

$$-500x = -2000$$

$$x = \frac{-2000}{-500} = 4$$

Para determinar qué tipo de extremos hay en $x = 4$, estudiamos el signo de $I'(x)$ a la izquierda y derecha del 4.

$$I'(3) = -500 \cdot 3 + 2000 = 500 > 0, \quad I(x) \text{ es creciente}$$

$$I'(5) = -500 \cdot 5 + 2000 = -500 < 0, \quad I(x) \text{ es decreciente}$$

Luego en $x = 4$ hay un máximo relativo, que es el absoluto porque la función sólo tiene un extremo.

Finalmente, el número total de comerciales que debe tener la empresa para que los ingresos sean máximos es de 19 ($15 + 4$).

- Para 19 comerciales ($x = 4$) los ingresos serán de $I(4) = (15 + 4) \cdot (5750 - 250 \cdot 4) = 19 \cdot 4750 = 90250$
 Los ingresos máximos serán de 90250 €.

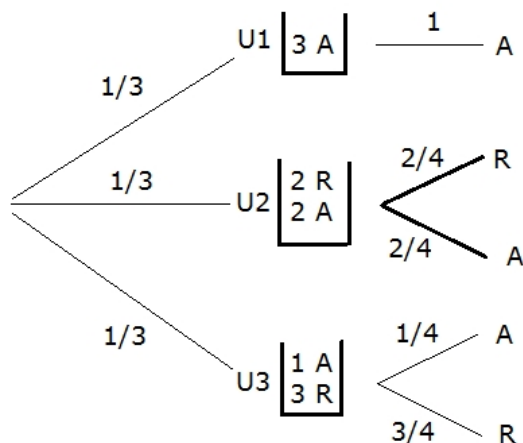
BLOQUE B

PROBLEMA 3. Tenemos tres urnas: la primera contiene 3 bolas azules, la segunda 2 bolas azules y 2 rojas y la tercera, 1 bola azul y 3 rojas. Elegimos una urna al azar y extraemos una bola. Calcula:

- La probabilidad de que la bola extraída sea roja.
- La probabilidad de que se haya elegido la segunda urna si la bola extraída ha sido roja.

Solución:

El árbol del problema los podemos representar de la siguiente forma,



Utilizando los sucesos: R = bola extraída es roja

$U2$ = escoger la 2ª urna

$$a) \quad p(R) = \frac{1}{3} \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12} = 0.4167$$

$$b) \quad p\left(\frac{U2}{R}\right) = \frac{p(U2 \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{2}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} = 0.4$$