Aula de Trigonometria

Rafael - Lumen Edu

October 22, 2024

1 Introdução à Trigonometria

A trigonometria estuda as relações entre os ângulos e os lados das figuras geométricas, particularmente dos triângulos. No triângulo retângulo, usamos as funções seno, cosseno e tangente para descrever essas relações.

1.1 Seno, Cosseno e Tangente no Triângulo Retângulo

As definições de seno, cosseno e tangente são dadas pelas seguintes relações:

$$\sin(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}, \quad \cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}, \quad \tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Abaixo temos a tabela dos valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos notáveis:

Ângulo	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Não definido

1.2 Graus e Radianos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos. Graus são mais comuns no dia a dia, enquanto radianos são usados em cálculos matemáticos mais avançados. A conversão entre graus e radianos é dada por:

$$1 \text{ radiano} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radianos}.$$

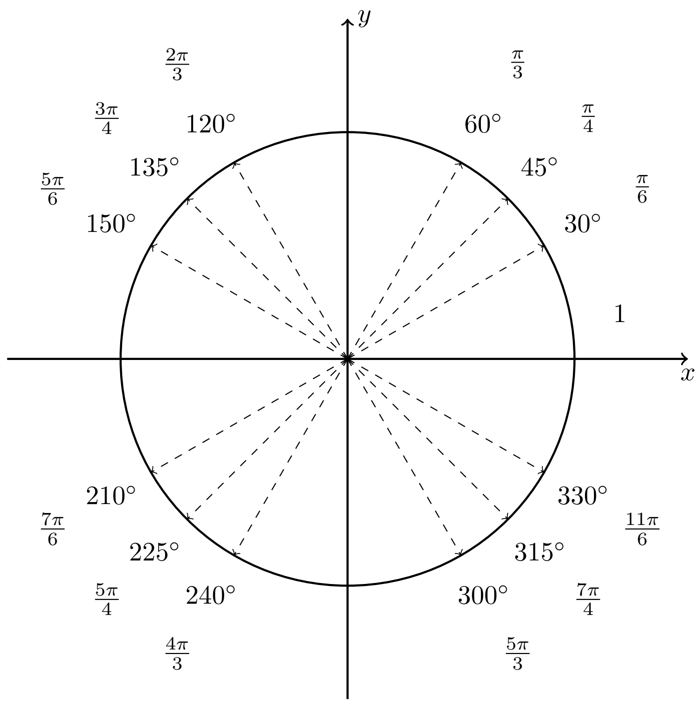
1.2.1 Exemplo de Conversão

Converta 45° para radianos:

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ radianos}.$$

2 Círculo Trigonométrico

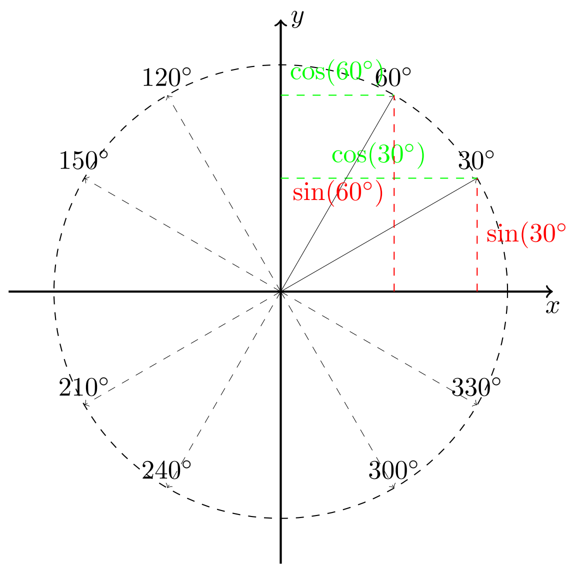
O círculo trigonométrico é uma ferramenta essencial na trigonometria. Ele é um círculo de raio unitário centrado na origem de um plano cartesiano, onde o comprimento de um arco é medido em radianos. A posição de um ponto sobre o círculo determina os valores de seno e cosseno para o ângulo correspondente.



2.1 Encontrando o Seno e o Cosseno no Círculo Trigonométrico

Para encontrar o seno e o cosseno de um ângulo no círculo trigonométrico, projetamos a coordenada do ponto que corresponde ao ângulo sobre os eixos x e y.

No círculo trigonométrico, o valor do cosseno de um ângulo é a coordenada x do ponto correspondente, enquanto o valor do seno é a coordenada y. Vamos visualizar isso para os ângulos de 30° e 60°, destacando as projeções em vermelho e verde:



Como mostrado, as projeções dos ângulos 30° e 60° no círculo trigonométrico permitem encontrar os valores de seno e cosseno. A coordenada y é o valor do seno e a coordenada x é o valor do cosseno.
Com base nisso, podemos constatar algumas propriedades interessantes, como:

Se $\alpha + \beta = 90° \implies \sin\alpha = \cos\beta$ e $\cos\alpha = \sin\beta$

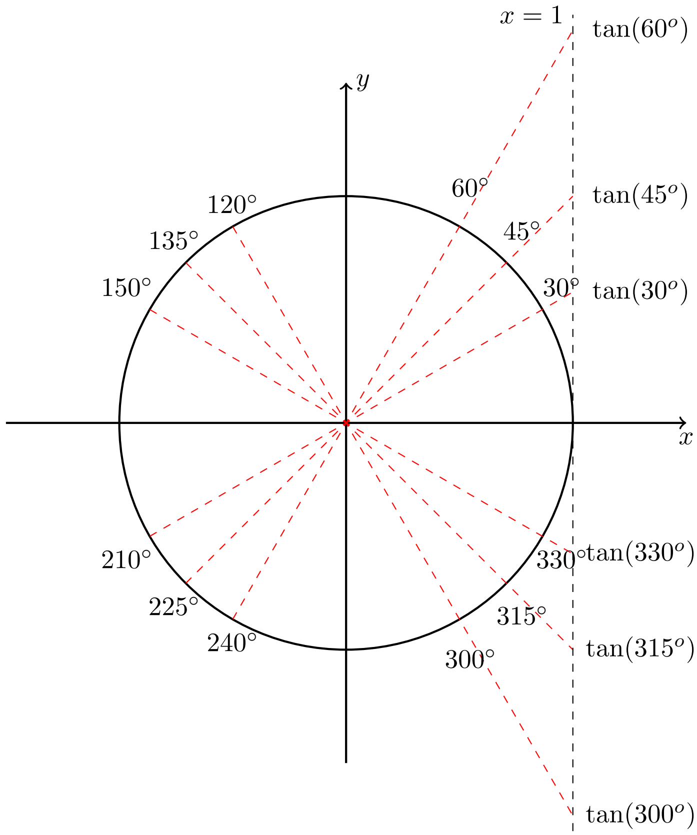
Se $\alpha + \beta = 180° \implies \sin\alpha = \sin\beta$ e $\cos\alpha = -\cos\beta$

Se $\alpha = \beta + 180° \implies \sin\alpha = -\sin\beta$ e $\cos\alpha = -\cos\beta$

O que também é válido para ângulos negativos. Caso não tenha visto esse conceito, para efeitos das funções trigonométricas, ângulos negativos são apenas o mesmo ângulo no círculo trigonométrico porém "girando" no sentido horário ao invés do sentido anti-horário. Por exemplo, $\sin(-60°) = \sin(300°)$

2.2 Encontrando a Tangente no Círculo Trigonométrico

A tangente é a medida da coordenada y da projeção do ângulo em uma reta tangente ao círculo trigonométrico e paralela ao eixo y. Isso pode parecer confuso, mas fica mais fácil quando demonstrado abaixo (a tangente é a "altura" desses pontos):

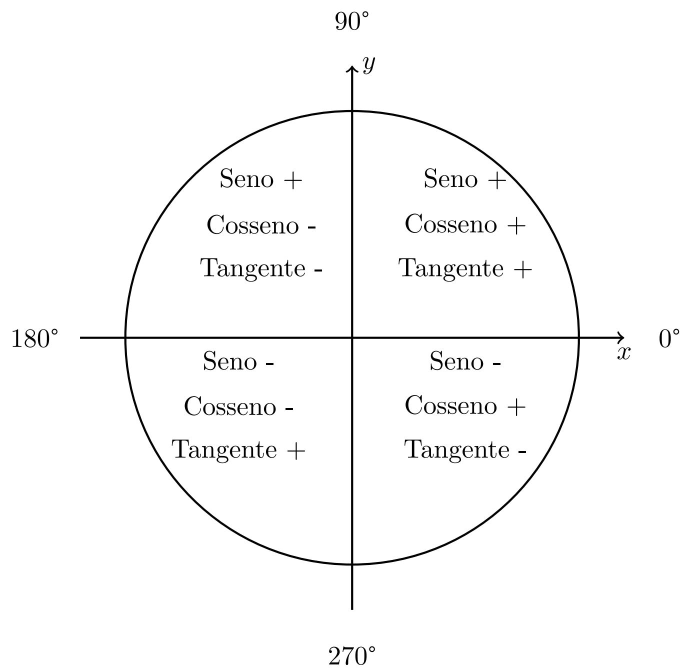


Assim, podemos observar algumas propriedades, como:
Se $\alpha = -\beta \implies \tan\alpha = -\tan\beta$

Se $\alpha = \beta + 180° \implies \tan\alpha = \tan\beta$

2.3 Propriedades do Círculo Trigonométrico

Assim, como o círculo trigonométrico tem o centro nas coordenadas $(0, 0)$, os senos, cossenos e tangentes podem ter valores positivos e negativos. Abaixo está uma representação disso no círculo trigonométrico:



Também é interessante perceber o círculo trigonométrico simplifica muito o cálculo que para ângulos maiores que 360°. Isso ocorre porque, após os 360°, o ângulo já deu uma ”volta” na circunferência. Ou seja, na prática, o seno, cosseno e tangente do ângulo 361° são iguais aos mesmos do ângulo 1°. Portanto, um jeito prático de calcular as funções trigonométricas de qualquer ângulo maior que 360° é apenas dividir tal ângulo por 360 e aplicar a função no resto da divisão.

3 Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são fundamentais para o estudo da trigonometria. Estas funções são periódicas, possuem paridade definida e têm domínio e imagem específicos.

3.1 Período

O período de uma função trigonométrica é o intervalo no qual o padrão da função se repete. As funções seno e cosseno têm um período de 2π, enquanto a tangente tem um período de π.

3.2 Paridade

- A função seno é **ímpar**, ou seja, $\sin(-x) = -\sin(x)$. - A função cosseno é **par**, ou seja, $\cos(-x) = \cos(x)$. - A função tangente é **ímpar**, ou seja,

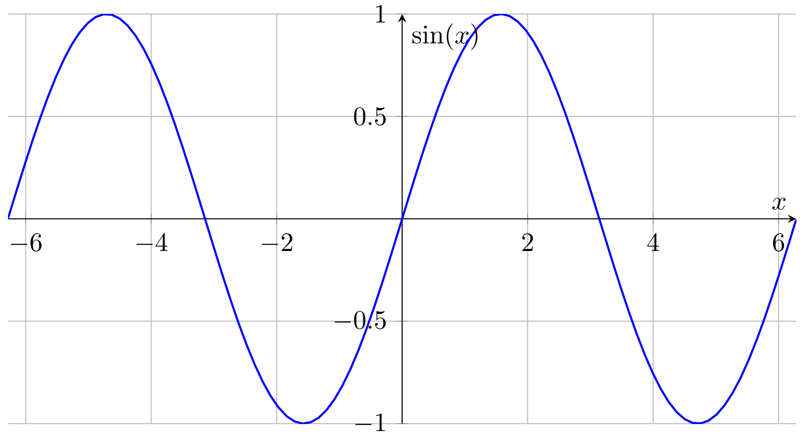
$\tan(-x) = -\tan(x)$.

3.3 Domínio e Imagem

- A função seno tem domínio $\mathbb{R}$ (todos os números reais) e imagem $[-1, 1]$. - A função cosseno também tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $[-1, 1]$. - A função tangente tem domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ (excluindo os pontos onde $\cos(x) = 0$) e imagem $\mathbb{R}$ (todos os números reais).

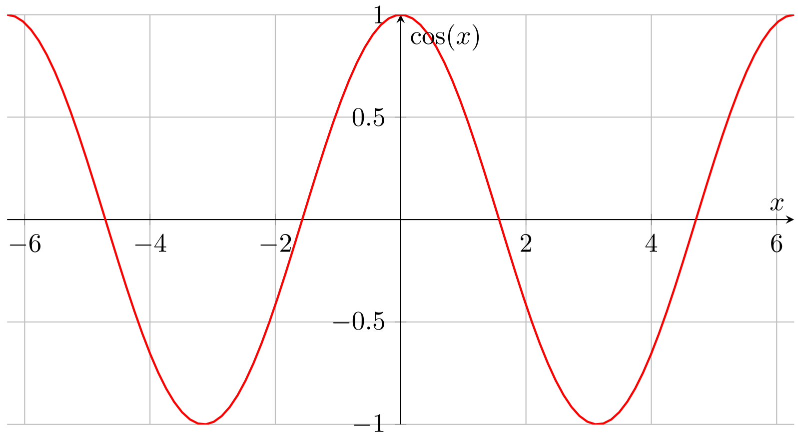
3.4 Gráfico da Função Seno

O gráfico da função seno apresenta um comportamento periódico, repetindo seu padrão a cada 2π radianos. Abaixo temos o gráfico da função seno:



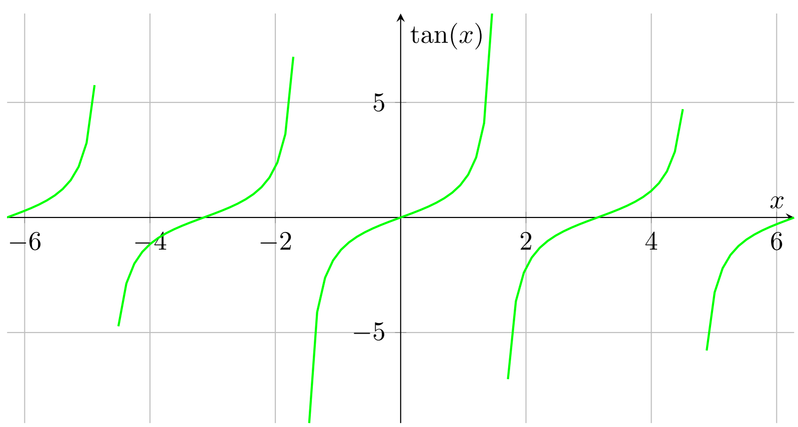
3.5 Gráfico da Função Cosseno

Assim como o seno, a função cosseno também apresenta periodicidade, repetindo seu padrão a cada 2π radianos. O gráfico da função cosseno é deslocado em relação ao gráfico do seno. Abaixo temos o gráfico da função cosseno:



3.6 Gráfico da Função Tangente

A função tangente tem um comportamento diferente das funções seno e cosseno, com um período de π e assíntotas verticais onde $\cos(x) = 0$. Abaixo temos o gráfico da função tangente:



4 Transformações Trigonométricas

Essas fórmulas são muito úteis quando é necessário manipular uma expressão com muitas funções trigonométricas para simplificá-la.

4.1 Soma e Diferença de Arcos

As fórmulas de soma e diferença de arcos para seno, cosseno e tangente são:

$$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B),$$

$$\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B),$$
$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B),$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B),$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)},$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan(A)-\tan(B)}{1+\tan(A)\tan(B)}.$$

4.2 Arco Duplo, Arco Metade e Arco Triplo

As fórmulas de arco duplo e arco metade são obtidas utilizando as fórmulas de somas de arcos com arcos iguais. Elas são:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}.$$

Para arco metade:

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta}{2}}$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}.$$

Os arcos triplos são raramente necessários pra maioria dos vestibulares (normalmente só são cobrados por vestibulares como ITA e IME), porém é melhor pecar pelo excesso. Suas fórmulas são obtidas pela fórmula de soma de arcos. Elas são:

$$\sin(3\theta) = 3\sin(\theta)\cos^2(\theta) - \sin^3(\theta)$$
$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta)$$
$$\tan(2\theta) = \frac{3\tan(\theta)-\tan^3(\theta)}{1-3\tan^2(\theta)}.$$

5 Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

As leis dos senos e dos cossenos são ferramentas importantes para resolver triângulos que não são necessariamente retângulos, relacionando os lados e ângulos de qualquer triângulo.

5.1 Lei dos Senos

A Lei dos Senos estabelece que:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2r,$$

onde r é o raio da circunferência circunscrita e a, b, e c são os lados do triângulo, enquanto A, B, e C são os ângulos opostos a esses lados.. Esta fórmula nos permite encontrar lados e ângulos de qualquer triângulo.

5.1.1 Exemplo

Dado um triângulo com os ângulos $A = 30°$, $B = 45°$, e o lado $a = 10$, encontramos o lado b utilizando a Lei dos Senos:

$$\frac{10}{\sin(30°)} = \frac{b}{\sin(45°)}$$

$$b = \frac{10 \times \sin(45°)}{\sin(30°)} \approx 14.14$$

5.2 Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos é, de certa forma, uma generalização do teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C).$$

Ela relaciona os lados e o cosseno de um ângulo em triângulos não retângulos. Nos casos acima, representa um triângulo formado pelos pontos A, B e C, e sendo o lado oposto a cada ponto a, b e c. Assim, perceba que, em um triângulo retângulo, se escolhermos o lado da hipotenusa e o ângulo oposto a ele, o cosseno será 0, uma vez que esse ângulo será 90^0. Assim, a expressão se transforma no Teorema de Pitágoras.

5.2.1 Exemplo

Suponha que em um triângulo, conhecemos $b = 7$, $c = 10$, e $A = 60°$. Usando a Lei dos Cossenos para encontrar o lado a:

$$a^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10)\cos(60°)$$

$$a^2 = 49 + 100 - 70 = 79 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{79} \approx 8.89$$