

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de junio de 2012

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Rango y sistemas matriciales

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **Rango según k .** Calculamos el determinante, que permite saber cuándo la matriz tiene rango máximo:

$$\begin{aligned} \det A &= k \begin{vmatrix} -1 & k \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2k & 2 \end{vmatrix} + k^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2k & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2k(k-1) - 2k(1-k^2) + 2k^2(k-1) = 4k(k-1)(k+1). \end{aligned}$$

Si $k \neq 0, 1, -1$, el determinante no se anula y $\text{rg}(A) = 3$. Para $k = 1$ o $k = -1$, el menor de las dos primeras filas y columnas primera y segunda vale $-2k \neq 0$. Para $k = 0$, el menor de las filas segunda y tercera y columnas primera y tercera vale 2. En los tres casos singulares existe, por tanto, un menor de orden dos no nulo; como el determinante es cero, el rango es 2. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si $k \notin \{-1, 0, 1\}$ y $\text{rg}(A) = 2$ si $k \in \{-1, 0, 1\}$.

b) **Sistema $AX = B$ para $k = 2$.** Sustituimos $k = 2$ y resolvemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 12, \\ x - y + 2z = 6, \\ 4x - 2y + 2z = 8. \end{cases}$$

Al dividir la primera ecuación entre dos queda $x + y + 2z = 6$. Restándola de la segunda ecuación en forma adecuada se obtiene $2y = 0$, así que $y = 0$. Las ecuaciones primera y tercera se reducen entonces a $x + 2z = 6$ y $2x + z = 4$. De la primera, $x = 6 - 2z$; al sustituir en la segunda, $12 - 3z = 4$, de donde $z = \frac{8}{3}$ y $x = \frac{2}{3}$. **Conclusión.** Para $k = 2$, la solución es $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, 0, \frac{8}{3})$.

c) **Sistema $AX = C$ para $k = 1$.** En este caso, la tercera fila de la matriz de coeficientes es el doble de la segunda. Para que el sistema fuese compatible, el término independiente de la tercera ecuación tendría que ser también el doble del de la segunda. Sin embargo, en $C = (4, 3, 3)^T$ se tiene $3 \neq 2 \cdot 3$. Las matrices de coeficientes y ampliada tienen rangos distintos, por lo que Rouché-Frobenius indica que no hay solución. **Conclusión.** Para $k = 1$, el sistema $AX = C$ es incompatible.

Opción A - Ejercicio 2. Coplanaridad, volumen y plano mediador

Tomamos como origen $P_1 = (1, 3, -1)$ y calculamos los vectores que unen este punto con los otros tres:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (a-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5), \quad \overrightarrow{P_1P_4} = (1, -3, 3).$$

a) **Coplanaridad.** Cuatro puntos son coplanarios si el determinante de esos tres vectores es cero:

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 7(3a-4) = 0.$$

Conclusión. Los cuatro puntos están en un mismo plano cuando $a = \frac{4}{3}$.

b) **Volumen del tetraedro.** El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de los tres vectores concurrentes:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4} \right) \right| = \frac{7}{6} |3a-4|.$$

Imponemos el volumen pedido, $V = 7$:

$$\frac{7}{6} |3a-4| = 7 \iff |3a-4| = 6.$$

Por tanto, $3a-4 = 6$ o $3a-4 = -6$, que dan $a = \frac{10}{3}$ y $a = -\frac{2}{3}$. **Conclusión.** El volumen es 7 para $a = \frac{10}{3}$ o $a = -\frac{2}{3}$.

c) **Plano de puntos equidistantes de P_1 y P_3 .** El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos es el plano mediador del segmento que los une. Su vector normal es $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$. Igualamos las distancias al cuadrado de un punto genérico $X = (x, y, z)$:

$$|X - P_1|^2 = |X - P_3|^2 \iff 2(P_3 - P_1) \cdot X = |P_3|^2 - |P_1|^2.$$

Como $|P_3|^2 = 42$ y $|P_1|^2 = 11$, resulta $4y + 10z = 31$. **Conclusión.** El plano pedido es $4y + 10z - 31 = 0$.

Opción A - Ejercicio 3. Condiciones sobre una función cúbica

Buscamos a, b, c para que $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2 y un punto de inflexión en $x = 3$. La condición de máximo exige $f(1) = 2$ y $f'(1) = 0$; la condición de inflexión requiere $f''(3) = 0$ y un cambio de concavidad.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a.$$

Las tres condiciones dan el sistema

$$1 + a + b + c = 2, \quad 3 + 2a + b = 0, \quad 18 + 2a = 0.$$

De la última ecuación $a = -9$; la segunda proporciona $b = 15$, y la primera da $c = -5$. Comprobamos el carácter del extremo: $f''(1) = 6 - 18 = -12 < 0$, por lo que en $x = 1$ hay un máximo relativo. Además, $f''(x) = 6(x - 3)$ cambia de signo al pasar por $x = 3$. **Conclusión.** $a = -9, b = 15$ y $c = -5$. La función es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$.

Opción A - Ejercicio 4. Integrales definidas

a) Para integrar $e^{2x} \cos x$ aplicamos integración por partes dos veces. Si $I = \int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx$ y $J = \int_0^\pi e^{2x} \sin x \, dx$, se obtiene

$$I = \frac{1}{2}[e^{2x} \cos x]_0^\pi + \frac{1}{2}J, \quad J = \frac{1}{2}[e^{2x} \sin x]_0^\pi - \frac{1}{2}I = -\frac{1}{2}I.$$

Así, $I = \frac{1}{2}(-e^{2\pi} - 1) - \frac{1}{4}I$, y por tanto

$$I = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1).$$

Conclusión. $\int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)$.

b) En la segunda integral hacemos el cambio $u = \cos 2x$, de modo que $du = -2 \sin 2x \, dx$. Los extremos $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ se transforman en $u = 1$ y $u = -1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} [\arctan u]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Conclusión. El valor de la integral es $\frac{\pi}{4}$.

Opción B - Ejercicio 1. Dominio, derivada y extremos

a) **Dominio y límite de f .** La función es

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

El logaritmo exige $x + 1 > 0$ y, al estar la raíz en el denominador, se requiere $x^2 - 3 > 0$. Al intersectar ambas condiciones queda $x > \sqrt{3}$; por tanto, $D_f = (\sqrt{3}, +\infty)$. Para el límite en $+\infty$, dividimos numerador y denominador por x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{\ln(x+1)}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}} = 3,$$

pues $\frac{\ln(x+1)}{x} \rightarrow 0$. **Conclusión.** $D_f = (\sqrt{3}, +\infty)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

b) **Derivada de $g(x) = (\ln x)^x$ en $x = e$.** Como la variable aparece tanto en la base como en el exponente, escribimos $g(x) = e^{x \ln(\ln x)}$ (para $x > 1$) y derivamos mediante la regla de la cadena:

$$g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right).$$

En $x = e$, $\ln e = 1$ y $(\ln e)^e = 1$, luego $g'(e) = 1$. **Conclusión.** $g'(e) = 1$.

c) **Cortes y extremos de h .** Como $h(x) = \sin(\pi - x) = \sin x$, sus ceros en $(0, 2\pi)$ se obtienen de $\sin x = 0$: el único es $x = \pi$. Además, $h'(x) = \cos x$; los puntos críticos del intervalo satisfacen $\cos x = 0$, es decir, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Sus ordenadas son 1 y -1, respectivamente. **Conclusión.** El corte con el eje x es $(\pi, 0)$; los extremos relativos son el máximo $(\frac{\pi}{2}, 1)$ y el mínimo $(\frac{3\pi}{2}, -1)$.

Opción B - Ejercicio 2. Rectas alabeadas y distancia

Pasamos las rectas a forma paramétrica, como se indica en la forma continua de r_1 :

$$r_1 : (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(3, -5, 2), \quad r_2 : (x, y, z) = (-1, 3, 5) + s(-1, 1, 0).$$

Sus vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si son coplanarias, calculamos el producto mixto con el vector que une los puntos $P = (2, 1, 0)$ y $Q = (-1, 3, 5)$:

$$\overrightarrow{PQ} = (-3, 2, 5), \quad (3, -5, 2) \times (-1, 1, 0) = (-2, -2, -2),$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot ((3, -5, 2) \times (-1, 1, 0)) = -8 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo indica que las rectas no son coplanarias; por ello son alabeadas. La distancia entre dos rectas alabeadas se calcula mediante

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Aquí $\|(-2, -2, -2)\| = 2\sqrt{3}$, así que **Conclusión.** Las rectas son alabeadas y su distancia mínima es $\frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Opción B - Ejercicio 3. Rango y ecuación matricial

La matriz B tiene cuatro columnas, por lo que su rango no puede superar 3. Calculamos sus cuatro menores de orden tres (uno por cada elección de tres columnas); estos son

$$-40(a-1), \quad -36(a-1), \quad 36(a-1), \quad 20(a-1).$$

Si $a \neq 1$, el primero es no nulo y $\text{rg}(B) = 3$. Para $a = 1$, todos los menores de orden tres se anulan. Sin embargo, el menor de orden dos formado por las dos primeras filas y columnas primeras y segundas vale -14 , por lo que el rango es 2. **Conclusión.** $\text{rg}(B) = 3$ si $a \neq 1$ y $\text{rg}(B) = 2$ si $a = 1$.

b) Cálculo de X para $a = 0$. La ecuación es $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\det A = 4 \neq 0$, podemos despejar $X = A^{-1}B$. Realizando primero la inversa y después la multiplicación,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz que verifica $AX = B$ para $a = 0$ es la indicada.

Opción B - Ejercicio 4. Determinante de orden cuatro

Restamos la cuarta fila a cada una de las tres primeras; estas operaciones no cambian el determinante. Se obtiene una matriz triangular inferior por bloques:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1).$$

Conclusión. El determinante vale $(x-1)(y-1)(z-1)$.