

Soluciones originales de las opciones A y B, desarrolladas desde los enunciados.

Opción A

Ejercicio 1 · Dimensiones y ecuación matricial

a) La matriz B es 2×2 , mientras que C^t es 3×2 . Para que AB tenga la misma dimensión que $2C^t$, la matriz A debe tener 3 filas y 2 columnas.

b) Despejamos A en $AB = 2C^t$ multiplicando por B^{-1} a la derecha. Como $\det B = -30 \neq 0$, la inversa existe:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad 2C^t = \begin{pmatrix} -2 & -18 \\ -16 & 6 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$A = 2C^t B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -18 \\ -16 & 6 \\ -2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz obtenida cumple los datos conocidos $a_{31} = 2$, $a_{12} = -3$ y $a_{22} = 1$.

$$\dim(A) = 3 \times 2; \quad A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 · Condición de mínimo y recta tangente

La función está definida en todo $\mathbb{R}$, al estar formada por polinomios y una exponencial:

$$f(x) = -2x^3 + ae^{-x} + bx - 1.$$

Que la gráfica pase por $(0, 0)$ significa $f(0) = 0$, de donde $a - 1 = 0$ y $a = 1$. Para que haya un mínimo en un punto interior, se requiere $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$:

$$f'(x) = -6x^2 - ae^{-x} + b, \quad f'(0) = -a + b = 0 \implies b = 1,$$

$$f''(x) = -12x + ae^{-x}, \quad f''(0) = 1 > 0.$$

Esto confirma que $x = 0$ es un mínimo local.

Para $a = 0$, $b = 1$, queda $f(x) = -2x^3 + x - 1$. En $x = -1$,

$$f(-1) = 0, \quad f'(x) = -6x^2 + 1, \quad f'(-1) = -5.$$

La recta tangente pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente -5 :

$$y - 0 = -5(x + 1) \implies y = -5x - 5.$$

$$a = 1, \quad b = 1; \quad \text{tangente cuando } a = 0, b = 1 : y = -5x - 5.$$

Ejercicio 3 · Independencia y probabilidad condicionada

Se conoce $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,3$, y los sucesos son independientes. Por ello,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 > 0,$$

de modo que no son incompatibles. La probabilidad de que ocurra A y no ocurra B es

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = 0,5 \cdot 0,7 = 0,35.$$

Al condicionar por B^c , la independencia implica que $P(A | B^c) = P(A)$:

$$P(A | B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{0,35}{0,7} = 0,5.$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza y tamaño muestral

El centro del intervalo es la media muestral y su semiamplitud es el error de estimación:

$$\bar{x} = \frac{31,2 + 33,4}{2} = 32,3 \text{ cm}, \quad E = \frac{33,4 - 31,2}{2} = 1,1 \text{ cm}.$$

Para un nivel de confianza del 96%, usamos $z_{0,98} \approx 2,05$. Con desviación típica $\sigma = 5$ cm, el error es $E = z\sigma/\sqrt{n}$. Despejando n para que $E \leq 1,5$:

$$n \geq \left(\frac{z_{0,98}\sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2,05 \cdot 5}{1,5} \right)^2 \approx 46,69.$$

El tamaño debe ser un entero no inferior a esa cota.

$$\bar{x} = 32,3 \text{ cm}; \quad E = 1,1 \text{ cm}; \quad n_{\min} = 47.$$

Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal

Sean x los kilogramos de lácteos y y los kilogramos de pescado. El coste que queremos minimizar es

$$C(x, y) = 6x + 12y.$$

La cantidad total no puede superar 4 kg, y los aportes de proteínas y calorías deben ser al menos 4 y 3 unidades. Con las condiciones de no negatividad, el modelo es

$$x + y \leq 4, \quad 3x + y \geq 4, \quad x + 2y \geq 3, \quad x, y \geq 0.$$

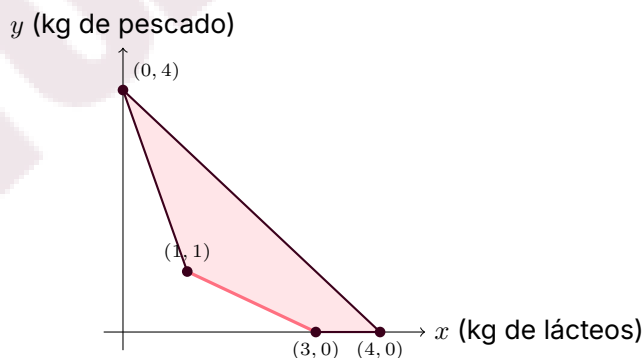
Las intersecciones que forman el recinto factible son $(0, 4)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$ y $(4, 0)$. Por ejemplo, la intersección de las condiciones de proteínas y calorías satisface

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x + 2y = 3 \end{cases} \implies (x, y) = (1, 1).$$

Evaluamos el coste en los vértices:

(x, y)	$(0, 4)$	$(1, 1)$	$(3, 0)$	$(4, 0)$
$C(x, y)$	48	18	18	24

El coste mínimo es 18 € y se alcanza en toda la arista $x + 2y = 3$ entre $(1, 1)$ y $(3, 0)$, porque sobre esa recta $C = 6(x + 2y) = 18$.



$$C_{\min} = 18 \text{ €}; \quad (x, y) \text{ puede ser cualquier punto del segmento } [(1, 1), (3, 0)].$$

Ejercicio 2 · Derivabilidad de una función a trozos

La función está definida para todo $\mathbb{R}$. Para que sea derivable en $x = 0$, primero debe ser continua. Igualando el límite por la izquierda con el valor de la rama derecha:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5, & x < 0, \\ -x^2 + b, & x \geq 0, \end{cases} \quad f(0^-) = 5, \quad f(0) = b \implies b = 5.$$

Después igualamos las derivadas laterales. La derivada izquierda es $2x - a$ y la derecha $-2x$, así que en cero deben cumplir $-a = 0$. Por tanto, $a = 0$. Con estos valores, ambas ramas coinciden en valor y pendiente en el origen.

$$a = 0, \quad b = 5.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad de sucesos

Sean E el suceso «defecto eléctrico» y M «defecto mecánico». Como $P(E) = 0,045$, $P(M) = 0,035$ y $P(E \cap M) = 0,01$, la probabilidad de al menos un defecto es

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = 0,045 + 0,035 - 0,01 = 0,07.$$

Así, la probabilidad de no tener defectos es $1 - 0,07 = 0,93$. La probabilidad condicionada de defecto mecánico dado defecto eléctrico es

$$P(M | E) = \frac{P(E \cap M)}{P(E)} = \frac{0,01}{0,045} = \frac{2}{9} \approx 0,2222.$$

No son independientes, porque $P(E \cap M) = 0,01 \neq 0,045 \cdot 0,035 = 0,001575$. Sí son compatibles, ya que la intersección tiene probabilidad positiva.

$$P(\text{ningún defecto}) = 0,93; \quad P(M | E) = \frac{2}{9} \approx 0,2222; \quad E, M \text{ compatibles y dependientes.}$$

Ejercicio 4 · Contraste unilateral para una proporción

La afirmación de interés es que al menos el 25% de la población usa esa marca. Contrastamos $H_0 : p \geq 0,25$ frente a $H_1 : p < 0,25$. En la muestra,

$$\hat{p} = \frac{215}{950} \approx 0,2263.$$

Bajo el valor frontera $p_0 = 0,25$, el estadístico normalizado es

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} = \frac{0,2263 - 0,25}{\sqrt{0,25 \cdot 0,75/950}} \approx -1,69.$$

Al 5%, el valor crítico de cola izquierda es $-1,645$. Como $-1,69 < -1,645$, rechazamos H_0 : los datos no respaldan la afirmación del 25% al nivel del 5%. Al 1%, el valor crítico es $-2,326$; el estadístico no queda en la región crítica, así que no rechazamos H_0 a ese nivel.

$$\alpha = 0,05 : \text{ se rechaza } H_0; \quad \alpha = 0,01 : \text{ no se rechaza } H_0.$$