Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Convocatoria ordinaria 2021--2022 · Enunciado v2

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Optimización con restricciones

Sean x e y las cajas de los tipos primero y segundo. Las existencias imponen $3x+4y\le 120$ y $2x+6y\le 150$; además, $y\ge 9$ y $x\ge 0$. Queremos maximizar el número total de regalos $N=x+y$. Los vértices factibles son $(0,9)$, $(28,9)$, $(12,21)$ y $(0,25)$: el punto $(12,21)$ procede de la intersección de las dos restricciones de existencias, mientras que $(0,25)$ se obtiene de $2x+6y=150$ con $x=0$. Evaluamos la función objetivo:

$$N(0,9)=9,\quad N(28,9)=37,\quad N(12,21)=33,\quad N(0,25)=25.$$

El máximo se alcanza con $x=28$ e $y=9$. En ese caso se consumen $3(28)+4(9)=120$ piononos y $2(28)+6(9)=110$ pestiños.

$$\boxed{x=28,\ y=9;\qquad N_{\max}=37 \text{ cajas.}}$$

Ejercicio 2 · Inversa y ecuación matricial

Para que una matriz cuadrada tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero. Aquí

$$\det A=a\begin{vmatrix}a & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=a(a-4)+3=(a-1)(a-3).$$

Así, A es invertible si $a\neq 1,3$. Para $a=2$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\qquad \det A=-1.$$

Calculando la matriz adjunta y dividiéndola por el determinante, obtenemos

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 2\\ 6 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

En la ecuación $XA+I_3=B^tC$, aislamos XA y multiplicamos por A^{-1} por la derecha. Con $B=(2,-1,0)$ y $C=(1,3,-1)^t$,

$$B^tC-I_3=\begin{pmatrix}1 & 6 & -2\\ -1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad X=(B^tC-I_3)A^{-1}=\begin{pmatrix}-28 & -21 & 19\\ 16 & 12 & -11\\ -6 & -5 & 4\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A \text{ es invertible si } a\notin\{1,3\};\quad A^{-1}\big|_{a=2}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 2\\ 6 & 5 & -4\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}-28 & -21 & 19\\ 16 & 12 & -11\\ -6 & -5 & 4\end{pmatrix}.}$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Condiciones de extremo y recta tangente

a) La abscisa $x=3$ es un extremo relativo, así que $f'(3)=0$. La pendiente de la tangente en $P(0,18)$ es $f'(0)=-3$, y como P pertenece a la gráfica, $f(0)=18$. Derivando $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ e imponiendo estas condiciones:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\qquad c=18,\qquad b=-3,$$

$$f'(3)=27+6a+b=0\Longrightarrow 27+6a-3=0\Longrightarrow a=-4.$$

Además, $f''(3)=18+2a=10>0$, por lo que en $x=3$ hay un mínimo relativo.
b) Factorizamos la función para encontrar los cortes con el eje OX:

$$g(x)=x^3-4x^2-3x+18=(x+2)(x-3)^2.$$

Los ceros son -2 y 3; en $(-2,3)$ la función es no negativa, así que el recinto acotado tiene área

$$A=\int_{-2}^{3} g(x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+18x\right]_{-2}^{3}=\frac{625}{12}.$$

$$\boxed{a=-4,\ b=-3,\ c=18; \qquad A=\frac{625}{12}\ \text{unidades}^2.}$$

Ejercicio 4 · Continuidad, derivabilidad y área

a) El punto de unión es $x=1$. Para que f sea continua, igualamos el valor de la primera rama y el límite de la segunda; para que sea derivable, igualamos las derivadas laterales:

$$6(1)-3=a+b+2\Longrightarrow a+b=1, \qquad 6=2a+b.$$

Al restar las ecuaciones resulta $a=5$ y luego $b=-4$.
b) La parábola $g(x)=-2x^2+8x-6$ corta al eje en las soluciones de $-2(x-1)(x-3)=0$, es decir, en $x=1$ y $x=3$. Como abre hacia abajo, es positiva entre esos puntos; por tanto,

$$A=\int_{1}^{3}(-2x^2+8x-6)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}.$$

$$\boxed{a=5,\quad b=-4; \qquad A=\frac{8}{3}\ \text{unidades}^2.}$$

tuProfealRescate

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad de sucesos complementarios

Sean H el suceso «crédito hipotecario» y G el suceso «importe superior a 200 000 euros». Los datos son $P(H) = 0{,}70$, $P(G) = 0{,}25$ y $P(H \cap G) = 0{,}20$.

a) El suceso pedido es $H^c \cap G^c$, complementario de $H \cup G$. Por la fórmula de la unión,

$$P(H^c \cap G^c) = 1 - P(H \cup G) = 1 - [P(H) + P(G) - P(H \cap G)] = 0{,}25.$$

b) Si el crédito no es hipotecario, $P(H^c) = 0{,}30$. Así,

$$P(G^c \mid H^c) = \frac{P(H^c \cap G^c)}{P(H^c)} = \frac{0{,}25}{0{,}30} = \frac{5}{6}.$$

c) De los créditos superiores a 200 000 euros, la parte no hipotecaria es $P(H^c \cap G) = P(G) - P(H \cap G) = 0{,}05$. Por tanto,

$$P(H^c \mid G) = \frac{0{,}05}{0{,}25} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{P(H^c \cap G^c) = 0{,}25; \quad P(G^c \mid H^c) = \frac{5}{6}; \quad P(H^c \mid G) = \frac{1}{5}.}$$

Ejercicio 6 · Unión e intersección

Sean V «jugar a videojuegos» y L «leer libros». Como el 15% no realiza ninguna actividad, $P(V \cup L) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$. La fórmula de la unión permite hallar la intersección:

$$P(V \cap L) = P(V) + P(L) - P(V \cup L) = 0{,}65 + 0{,}45 - 0{,}85 = 0{,}25.$$

Por tanto, la probabilidad de que juegue o lea es $0{,}85$; la de que juegue pero no lea es $P(V) - P(V \cap L) = 0{,}40$. Finalmente,

$$P(L \mid V^c) = \frac{P(L \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{P(L) - P(V \cap L)}{1 - P(V)} = \frac{0{,}20}{0{,}35} = \frac{4}{7}.$$

$$\boxed{P(V \cup L) = 0{,}85; \quad P(V \cap L^c) = 0{,}40; \quad P(L \mid V^c) = \frac{4}{7}.}$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Intervalo de confianza para una media

La desviación típica poblacional es $\sigma = 15$ MPa, el tamaño muestral es $n = 100$ y la media observada es $\bar{x} = 800$ MPa. Para una media con σ conocida usamos

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Con confianza del 92%, $z_{0{,}96} \approx 1{,}751$, de modo que el error es $1{,}751(15/10) \approx 2{,}626$ MPa. El intervalo es

$$(800 - 2{,}626,\ 800 + 2{,}626) \approx (797{,}37,\ 802{,}63) \text{ MPa}.$$

Para el tamaño mínimo con error menor que 2 MPa, mantenemos el nivel de confianza y exigimos

$$1{,}751\frac{15}{\sqrt{n}} < 2 \Longrightarrow n > \left(\frac{1{,}751 \cdot 15}{2}\right)^2 \approx 172{,}4.$$

El primer entero que cumple la condición es 173.

$$\boxed{IC_{92\%} \approx (797{,}37, 802{,}63) \text{ MPa}; \qquad n_{\text{mín}} = 173.}$$

Ejercicio 8 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de perros vacunados es $\widehat{p} = 320/400 = 0{,}8$, por lo que $\widehat{q} = 0{,}2$. El intervalo bilateral para una proporción es

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}.$$

Para un nivel del 92%, $z_{0,96} \approx 1{,}751$. Así, el error máximo es

$$E = 1{,}751\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}} \approx 0{,}0350,$$

y el intervalo resulta $(0{,}7650, 0{,}8350)$, es decir, aproximadamente entre $76{,}50\%$ y $83{,}50\%$.
En una nueva muestra, con el mismo nivel y proporción, exigimos $E < 0{,}02$:

$$1{,}751\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{n}} < 0{,}02 \Longrightarrow n > \frac{1{,}751^2(0{,}8)(0{,}2)}{0{,}02^2} \approx 1225{,}6.$$

El tamaño mínimo entero es 1226.

$$\boxed{IC_{92\%} \approx (0{,}7650, 0{,}8350); \qquad n_{\text{min}} = 1226.}$$

tuProfealRescate