

Modelo 6 de 2003

Áreas, asíntotas, sistemas matriciales, planos y optimización.

Opción A - Ejercicio 1

La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$. Cambia de positiva a negativa en $x = -1$, así que allí se alcanza el máximo relativo. Su ordenada es $f(-1) = 8$, y la tangente horizontal es $y = 8$. La curva corta a esa recta cuando

$$2x^3 - 6x + 4 = 8 \implies x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 = 0.$$

Los puntos de corte son $x = -1$ (tangencia) y $x = 2$. Entre ellos la recta queda por encima de la curva, por lo que el área es

$$S = \int_{-1}^2 (8 - f(x)) dx = \int_{-1}^2 (-2x^3 + 6x + 4) dx = \left[\frac{27}{2} \right].$$

Opción A - Ejercicio 2

Dividimos para separar la parte polinómica:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} = x - 2 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}.$$

El dominio excluye $x = -1$; como el numerador original allí no se anula, $x = -1$ es asíntota vertical y ambos límites laterales valen $-\infty$. El último término de la descomposición tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, así que $y = x - 2$ es asíntota oblicua. Para estudiar si la gráfica corta a sus asíntotas, no puede cortar la vertical, pues $x = -1$ no pertenece al dominio. La oblicua sí se corta cuando

$$f(x) - (x - 2) = \frac{3x+2}{(x+1)^2} = 0 \implies x = -\frac{2}{3}.$$

El punto de corte es $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right)$. **Opción A - Ejercicio 3**

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\det A = -(m-3)(m-1).$$

Por tanto, A^{-1} existe si y solo si $m \neq 1, 3$. Para $m = 2$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -12/7 & 1/7 & -3/7 \\ -8/7 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $m = 1$, la tercera ecuación es cuatro veces la primera más la segunda, incluso en el término independiente. Así, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada son $2 < 3$; Rouché-Frobenius clasifica el sistema como compatible indeterminado. Una parametrización de todas las soluciones es

$$(x, y, z) = (1 + t, -1 - 3t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta está contenida en π si la ecuación del plano se obtiene como combinación lineal de las dos ecuaciones que definen r . Para $a = -1$, sumamos estas ecuaciones y dividimos entre 2:

$$\frac{1}{2}(x - 3y + z = 0) + \frac{1}{2}(x - y - z + 2 = 0) \implies x - 2y + 1 = 0.$$

Por tanto, $a = -1$. La recta s tiene vector director, producto vectorial de los normales de sus planos,

$$d = (1, -3, 1) \times (1, -1, 1) = (-2, 0, 2) \sim (1, 0, -1).$$

El normal de π es $n = (1, -2, 0)$. Si θ es el ángulo entre la recta y el plano, el seno se obtiene mediante

$$\sin \theta = \frac{|d \cdot n|}{\|d\| \|n\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Así, $\theta = \arcsin(1/\sqrt{10})$.

Opción B - Ejercicio 1

Sea $x > 1$ la abscisa del vértice opuesto al origen. El rectángulo tiene anchura x y altura $y = 2x^2/(x^2 - 1)$, así que el área es

$$A(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}, \quad x > 1.$$

Derivamos para encontrar el mínimo:

$$A'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}.$$

La derivada es negativa para $1 < x < \sqrt{3}$ y positiva para $x > \sqrt{3}$, de modo que el mínimo se alcanza en $x = \sqrt{3}$. La altura es 3 y el área mínima vale $\boxed{3\sqrt{3}}$. **Opción B - Ejercicio 2**

Las intersecciones de $f(x) = 6 - x^2$ y $g(x) = |x|$ se obtienen por tramos: son $x = -2$ y $x = 2$. En $[-2, 2]$, f queda por encima de g . Por simetría, el área es

$$S = 2 \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \boxed{\frac{44}{3}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sean a, b, c los espectadores de las salas A, B y C. Las tres condiciones se traducen en

$$3a + 4b + 5c = 720, \quad a + b + c = 200, \quad 4a + 3b + 5c = 740.$$

Al restar la segunda relación de recaudación de la primera, $a - b = -20$ (equivalentemente, $b - a = 20$). Resolviendo junto con las otras ecuaciones se obtiene

$$\boxed{a = 100, \quad b = 80, \quad c = 20}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Si el centro de una circunferencia es (h, k) y es tangente a ambos ejes, su radio satisface $|h| = |k| = r$. Como pasa por $(-1, -8)$,

$$(-1 - h)^2 + (-8 - k)^2 = r^2.$$

Al considerar los cuatro signos posibles de h y k , solo $h = k = -r$ da radios positivos: $r = 5$ o $r = 13$. Por tanto, hay dos circunferencias:

$$\boxed{(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25}, \quad \boxed{(x + 13)^2 + (y + 13)^2 = 169}.$$

Ambas pasan por $(-1, -8)$ y son tangentes a los dos ejes.