

Características de la prueba.

Se elegirán TRES bloques y se hará un problema de cada uno de ellos.

Cada problema se puntuará de 0 a 3,3, según la puntuación máxima de cada apartado.

La suma de las puntuaciones más 0,1 será la calificación de la prueba.

Cada estudiante deberá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos o gráficos deben estar debidamente justificados.

Bloque 1. ÁLGEBRA LINEAL.

Problema 1.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente

- El vector X tal que $A X = 0X$. (1,1 puntos).
- Todos los vectores X tales que $A X = 3X$. (1,1 puntos).
- Todos los vectores X tales que $A X = 2X$. (1,1 puntos).

Problema 1.2. Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y + z = \alpha + 3 \\ 2x - y + z = \alpha + 1 \\ 3x + \alpha y + 2z = 4 \end{cases}$$
, se pide:

- Probar que es compatible para todo valor de α . (1,3 puntos).
- Obtener razonadamente el valor de α para el que el sistema es indeterminado. (1 punto).
- Resolver el sistema cuando $\alpha = 0$, escribiendo los cálculos necesarios para ello. (1 punto).

Bloque 2. GEOMETRÍA.

Problema 2.1. Dados los planos $\pi_1: x + y + z = 3$ y $\pi_2: x + y - \alpha z = 0$, se pide calcular razonadamente:

- El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares y, para este valor de α , obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de estos dos planos. (1,5 puntos).
- El valor de α para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos y, para este valor de α , obtener la distancia entre los dos planos π_1 y π_2 . (1,8 puntos).

Problema 2.2. Dados el punto $O = (0, 0, 0)$ y el plano $\pi: x + y + z = 6$, se pide calcular razonadamente:

- La ecuación de la recta r que pasa por O y es perpendicular al plano π . (1,1 puntos).
- Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano π . (1,1 puntos).
- La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta r . (1,1 puntos).

Bloque 3. ANÁLISIS.

Problema 3.1. Dada la función $f(t) = a t + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x \int_1^{x+1} f(t) dt$. Se pide obtener razonadamente:

- La integral $\int_1^{x+1} f(t) dt$ (1,5 puntos).
- La expresión de la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$. (0,5 puntos).
- La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$. (1,3 puntos).

Problema 3.2. Para cada número real positivo α , se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:

- El área de la región del plano limitada por el eje X , el eje Y , la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$. (2 puntos).

b) El valor de α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6}, 6 + \alpha)$, $(0, 6 + \alpha)$ en dos regiones de igual área. (1,3 puntos).

Bloque 4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Problema 4.1. Un móvil se mueve con velocidad constante de 2m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta $x = 1$, partiendo del punto $M = (1,0)$ situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:

- Las coordenadas del punto $M(t)$ donde está situado el móvil después de t segundos. (1 punto).
- La función $m(t)$ igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto $O = (0,0)$ y por el punto $M(t)$. (1,3 puntos).
- La derivada de la función $m(t)$. (1 punto).

Problema 4.2. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

- El área del rectángulo en función de x . (1,3 puntos).
- El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. (2 puntos).

Tu Prof te al Rescate