

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coches: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de Alemania un 24% del M1, un 40% del M2 y un 36% del M3.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.

- 1.1 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?
- 1.2 **(0.75 puntos)** Si un coche no presenta ningún defecto, ¿Cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?
- 1.3 **(1 punto)** Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

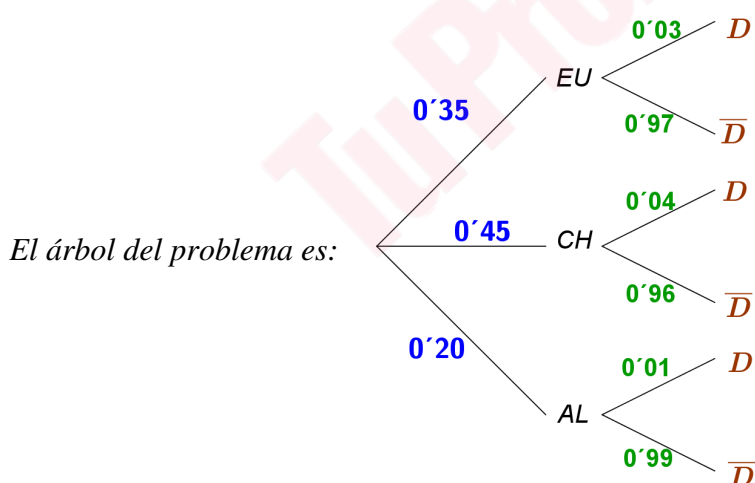
EU = coche fabricado en EEUU CH = coche fabricado en China AL = coche fabricado en Alemania

D = coche defectuoso $\bar{D}$ = coche no defectuoso

Para los apartados 1.1 y 1.2 utilizamos los siguientes datos del problema:

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coches: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.



- 1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

La probabilidad pedida es $P(D)$

$$P(D) = 0'35 \cdot 0'03 + 0'45 \cdot 0'04 + 0'20 \cdot 0'01 = 0'0305$$

Solución: la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto es 0'0305.

1.2 Si un coche no presenta ningún defecto, ¿Cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?

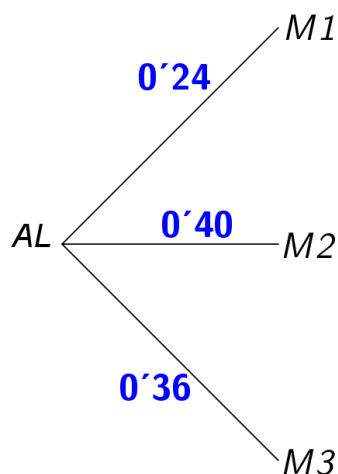
La probabilidad pedida es $P\left(\frac{EU}{\overline{D}}\right)$

$$P\left(\frac{EU}{\overline{D}}\right) = \frac{P(EU \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0'35 \cdot 0'97}{1 - P(D)} = \frac{0'35 \cdot 0'97}{1 - 0'0305} = \frac{97}{277} \cong 0'3502.$$

Solución: si un coche no presenta ningún defecto, la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos es 0'3502.

1.3 Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2.

Para este apartado el árbol a utilizar es:



$P(\text{coche fabricado en Alemania sea del modelo M2}) = 0'4$

Siendo X = número de coches del modelo M2 de un total de 9,

$$X = B(9, 0'4)$$

La probabilidad pedida es $P(X \geq 3)$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \{\text{según la tabla de la binomial}\} = 1 - 0'2318 = 0'7682$$

Solución: la probabilidad pedida es 0'7682.

También podemos calcular la probabilidad de forma directa:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\ &= 1 - \left[\binom{9}{0} 0'4^0 \cdot 0'6^9 + \binom{9}{1} 0'4^1 \cdot 0'6^8 + \binom{9}{2} 0'4^2 \cdot 0'6^7 \right] = 0'7682 \end{aligned}$$

2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real.

2.1.1 (1.25 puntos) Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

2.1.2 (1.25 puntos) Obtener las cantidades x , y , z en el caso de que el sistema sea compatible.

Solución:

2.2.1

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A' es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 3\alpha + 2\alpha + 8 - 2\alpha + 3 + 8\alpha = 11\alpha + 11$$

$$11\alpha + 11 = 0; \quad 11\alpha = -11 \rightarrow \alpha = \frac{-11}{11} = -1$$

Si $\alpha \neq -1$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $\alpha = -1$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,
$$\left. \begin{array}{l} |a_{11}| = |3| = 3 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 3ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 30 + 60 + 32 - 60 + 12 + 80 = 154 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A')$, luego el sistema es incompatible.

Solución, si $\alpha \neq -1$, el sistema es compatible determinado;

si $\alpha = -1$, el sistema es incompatible.

2.2.2 El sistema es compatible (determinado) para $\alpha \neq -1$.

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

$$|A| = 11\alpha + 11, \quad \{\alpha \neq -1 \rightarrow 11\alpha + 11 \neq 0\}$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{30\alpha - 4\alpha + 40 - 10\alpha + 30 - 16\alpha}{11\alpha + 11} = \frac{70}{11\alpha + 11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 30 & \alpha \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{12\alpha - 20\alpha + 60 - 8\alpha - 30 + 60\alpha}{11\alpha + 11} = \frac{30 + 44\alpha}{11\alpha + 11}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{154}{11\alpha + 11} = \frac{11 \cdot 14}{11(\alpha + 1)} = \frac{14}{\alpha + 1}$$

Si $\alpha \neq -1$, la solución es:
$$\begin{cases} x = \frac{70}{11\alpha + 11} \\ y = \frac{30 + 44\alpha}{11\alpha + 11} \\ z = \frac{14}{\alpha + 1} \end{cases}$$

2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix},$$

donde m es un parámetro real, se pide:

2.2.1 (0.5 puntos) Calcular el producto AB y la matriz traspuesta de AB .

2.2.2 (0.75 puntos) En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

2.2.3 (0.75 puntos) Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

Solución:

2.2.1 Calcular AB y la matriz traspuesta de AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + m \cdot 1 & 1 \cdot 2 + m \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m-1 & 5m+2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ 19 & 5m+2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m-1 & 5m+2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & m-1 \\ 19 & 5m+2 \end{pmatrix}$$

2.2.2 En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

A es invertible si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3; \quad 2m - 3 = 0; \quad 2m = 3; \quad m = \frac{3}{2}$$

$$\text{Si } m \neq \frac{3}{2} \quad \exists A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} m & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } (A)^{-1} = \frac{1}{2m-3} \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix} \quad \text{cuando } m \neq \frac{3}{2}.$$

2.2.3) Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$

Despejemos X :

$BX = C - A^2$; si $\exists B^{-1}$, multiplicando por B^{-1} por la izquierda: $B^{-1}BX = B^{-1}(C - A^2)$;

$$IX = B^{-1}(C - A^2); X = B^{-1}(C - A^2).$$

Veamos si existe B^{-1} ,

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$$

Cálculo de B^{-1} :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^2 ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot m \\ 1 \cdot 2 + m \cdot 1 & 1 \cdot 3 + m \cdot m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 + 3m \\ 2 + m & 3 + m^2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $C - A^2$,

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 + 3m \\ 2 + m & 3 + m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 - 3m \\ 3 - m & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X ,

$$X = B^{-1}(C - A^2) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -7 - 3m \\ 3 - m & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 \cdot (-7) + 2 \cdot (3 - m) & -5 \cdot (-7 - 3m) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot (-7) + 1 \cdot (3 - m) & 1 \cdot (-7 - 3m) + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 35 + 6 - 2m & 35 + 15m - 6 \\ -7 + 3 - m & -7 - 3m - 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 41 - 2m & 29 + 15m \\ -4 - m & -10 - 3m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41 - 2m}{7} & \frac{29 + 15m}{7} \\ \frac{-4 - m}{7} & \frac{-10 - 3m}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } X = \begin{pmatrix} \frac{41 - 2m}{7} & \frac{29 + 15m}{7} \\ \frac{-4 - m}{7} & \frac{-10 - 3m}{7} \end{pmatrix}.$$

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

Solución:

3.1.1 Calcular la distancia entre el punto $P(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 + a \cdot 1 - (-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 + a + 2 + 3|}{\sqrt{5 + a^2}} = \frac{|11 + a|}{\sqrt{5 + a^2}}$$

La distancia del punto $(3, 1, -2)$ al plano π es $\frac{|11 + a|}{\sqrt{5 + a^2}}$.

3.1.2 Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

Debemos obtener el vector normal del plano

$$\text{Si } a = 4, \quad \pi: 2x + 4y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi(2, 4, -1).$$

y el vector director de la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 21\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\text{Luego } \vec{v}_r = (21, -9, 6)$$

$$\text{Siendo } \hat{\beta} = \left(\vec{v}_r, \vec{n}_\pi \right) \rightarrow \left(\vec{r}, \pi \right) = 90^\circ - \left(\vec{v}_r, \vec{n}_\pi \right)$$

$$\cos \hat{\beta} = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \frac{|(21, -9, 6)(2, 4, -1)|}{\sqrt{21^2 + (-9)^2 + 6^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{|42 - 36 - 6|}{\sqrt{558} \sqrt{21}} = \frac{|0|}{\sqrt{558} \sqrt{21}} = 0$$

$$\cos \hat{\beta} = 0 \rightarrow \hat{\beta} = 90^\circ \rightarrow \left(\vec{r}, \pi \right) = 90^\circ - 90^\circ = 0$$

Solución: la recta r con el plano π forman un ángulo de 0° .

3.1.3 Para $a = 3$, simétrico del punto $P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

Si $a = 3$, $\pi: 2x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}_\pi(2, 3, -1)$.

El proceso para el cálculo del simétrico es:

1º) Recta, s , que pasa por P y es perpendicular a π

De la recta s conocemos: $\begin{cases} \text{punto } P\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) \\ \text{v. director, } s \perp \pi \rightarrow \vec{v}_s = \vec{n}_\pi(2, 3, -1) \end{cases}$

Las ecuación paramétrica de s , $s: \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2º) Punto de corte entre s y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$2\left(\frac{9}{2} + 2\lambda\right) + 3(5 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0; \quad 9 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + 1 + \lambda + 3 = 0; \quad 14\lambda + 28 = 0;$$

$$14\lambda = -28; \quad \lambda = \frac{-28}{14} = -2$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta r : $\begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2(-2) = \frac{1}{2} \\ y = 5 + 3(-2) = -1 \\ z = -1 - (-2) = 1 \end{cases}$

Entonces $M\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$.

3º) P' será tal que $\frac{P + P'}{2} = M$.

$$P + P' = 2M \rightarrow P' = 2M - P = 2\left(\frac{1}{2}, -1, 1\right) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) = (1, -2, 2) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) = \left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$$

Solución: $P'\left(\frac{-7}{2}, -7, 3\right)$.

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}.$$

3.2.1 (1.25 puntos) Calcular el valor del parámetro real α para el que r y s son perpendiculares.

3.2.2 (1.25 puntos) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada z vale 0.

Solución:

3.2.1 ¿ α ? / $r \perp s$.

Para que $r \perp s$, $\vec{v}_r \perp \vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$

Obtengamos los vectores directores de ambas rectas:

$$\vec{v}_r = (2, 3, \alpha)$$

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -3\vec{i} - 0\vec{j} + (-3)\vec{k} = -3\vec{i} - 3\vec{k} \equiv (-3, 0, -3) \approx (1, 0, 1)$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (2, 3, \alpha) \cdot (1, 0, 1) = 2 + \alpha \rightarrow 2 + \alpha = 0; \quad \alpha = -2$$

Solución: $\alpha = -2$.

3.2.2 Si $\alpha \neq 0$ ¿recta t ? / $t \parallel s$ y t pase por un punto de r , P_r , con $z = 0$.

Para $z = 0$, en r : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{0}{\alpha}$, como $\alpha \neq 0 \rightarrow \frac{0}{\alpha} = 0 \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = 0 \rightarrow x+1=0; & x=-1 \\ \frac{y-2}{3} = 0 \rightarrow y-2=0; & y=2 \end{cases} \rightarrow P_r(-1, 2, 0)$$

Como $t \parallel s$ $\vec{v}_t \parallel \vec{v}_s \rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_s = (1, 0, 1)$

De la recta t conocemos $\begin{cases} \text{punto } (-1, 2, 0) \\ \text{vector director } \vec{v}_t = (1, 0, 1) \end{cases}$, su ecuación paramétrica es

$$t: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Solución: la ecuación de la recta t es $\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

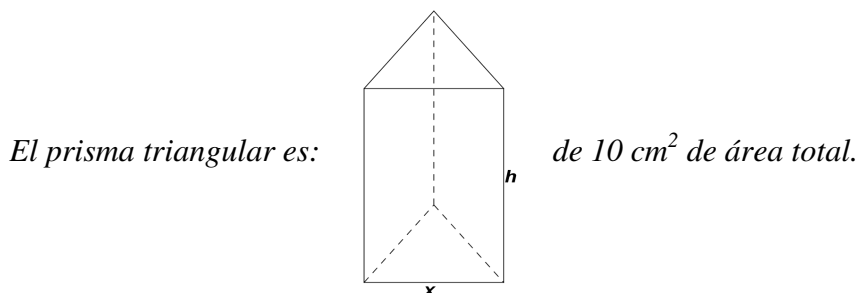
4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 **(0.5 puntos)** Expresar el área total del prisma en función de x y h .

4.1.2 **(1.5 puntos)** Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

4.1.3 **(0.5 puntos)** Hallar dicho volumen.

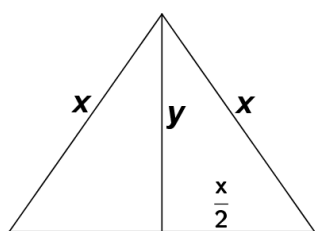
Solución:



El área lateral y el volumen del prisma: $A_T = A_L + 2 \cdot A_{\text{base}} = 3xh + 2A_{\text{base}}$ y $V = A_{\text{base}} \cdot h$

4.1.1 Expresar el área total del prisma en función de x y h .

Calculemos el área de la base del prisma. Las bases de este prisma, según enunciado, son triángulos equiláteros:



$$A_{\text{base}} = \frac{x \cdot y}{2}, \text{ obtengamos } y \text{ en función de } x.$$

En el triángulo rectángulo, aplicando Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2; \quad x^2 = y^2 + \frac{x^2}{4}; \quad y^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}; \quad y^2 = \frac{3x^2}{4};$$

x e y son longitudes, por tanto son positivas,

$$y = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \rightarrow A_{\text{base}} = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Luego, } A_T = 3xh + 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3xh + \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Solución: el área total del prisma en función de x y h es: $A_T = 3xh + \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ $x, h > 0$.

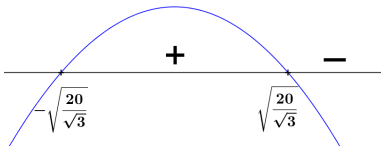
4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

El volumen del prisma es: $V = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} h$. Como en esta expresión tenemos dos variables hay que buscar una relación entre ellas. Sabemos que el área total es 10 cm^2 .

$$3xh + \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 10, \text{ despejemos } h: \quad 3xh = 10 - \frac{x^2\sqrt{3}}{2}; \quad 3xh = \frac{20 - x^2\sqrt{3}}{2}; \quad h = \frac{\frac{20 - x^2\sqrt{3}}{2}}{3x} = \frac{20 - x^2\sqrt{3}}{6x}$$

Como $x, h > 0$ obtengamos los posibles valores de x , debe ser $20 - x^2\sqrt{3} > 0$

$$20 - x^2\sqrt{3} = 0; \quad x^2\sqrt{3} = 20; \quad x^2 = \frac{20}{\sqrt{3}}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}. \text{ La inecuación de 2º grado tiene coeficiente de } x^2$$

negativo, gráficamente  Y como $x > 0 \rightarrow x \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \cong (0, 3'3981)$

$$\text{Por tanto, } V(x) = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{20 - x^2 \sqrt{3}}{6x} = \frac{x^2 \sqrt{3} (20 - x^2 \sqrt{3})}{24x} = \frac{x \sqrt{3} (20 - x^2 \sqrt{3})}{24} = \frac{x \sqrt{3} (20 - x^2 \sqrt{3})}{24} =$$

$$= \frac{20\sqrt{3}x - 3x^3}{24} \quad x \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{3}}\right) \cong (0, 3'3981)$$

Debemos calcular el máximo de $V(x)$

$$V'(x) = \frac{20\sqrt{3} - 9x^2}{24}; \quad V'(x) = 0; \quad \frac{20\sqrt{3} - 9x^2}{24} = 0; \quad 20\sqrt{3} - 9x^2 = 0; \quad 20\sqrt{3} = 9x^2; \quad x^2 = \frac{20\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{como } x > 0, \quad x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} \cong 1'9619 \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{3}}\right)$$

$$V''(x) = \frac{-18x}{24} \quad \text{y} \quad V''\left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right) < 0 \rightarrow \text{en } x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} \text{ hay un máximo relativo.}$$

$V(x)$ sólo tiene este máximo relativo que será el absoluto ya que a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.

Para

$$x = \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}, \quad h = \frac{20 - \left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right)^2 \sqrt{3}}{6 \left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right)} = \frac{20 - \frac{20\sqrt{3}}{9} \sqrt{3}}{6 \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3}} = \frac{20 - \frac{20 \cdot 3}{9}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{20 - \frac{20}{3}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} = \frac{\frac{40}{3}}{2\sqrt{20\sqrt{3}}} \cong 1'1327$$

Los valores que maximizan el volumen son $x = 1'9619 \text{ cm}$ y $h = 1'1327 \text{ cm}$.

4.1.3 Hallar dicho volumen.

Calculando el volumen usando el valor aproximado de x :

$$V(x) = \frac{20\sqrt{3}x - 3x^3}{24} \rightarrow V(1'9619) = \frac{20\sqrt{3} \cdot 1'9619 - 3(1'9619)^3}{24} \cong 1'8878$$

Calculando el volumen usando el valor exacto de x :

$$V(x) = \frac{20\sqrt{3}x - 3x^3}{24} \rightarrow V\left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right) = \frac{20\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}} - 3\left(\sqrt{\frac{20\sqrt{3}}{9}}\right)^3}{24} \cong 1'8878$$

Solución: el volumen pedido del prisma es de $1'8878 \text{ cm}^3$.

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 (0.75 puntos) Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 (0.5 puntos) Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 (0.5 puntos) Calcular la integral indefinida $\int f(x) dx$.

Solución:

4.2.1

Dom $f(x)$,

$$(x-1)^2 = 0; \quad x-1=0; \quad x=1 \quad \rightarrow \quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Asíntotas,

verticales,

Possible asíntota vertical $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) = \frac{4}{0} + 1 = \infty + 1 = \infty \quad \rightarrow \quad x=1 \text{ es la asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) &= \frac{4}{+\infty} + (-\infty) = 0 - \infty = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) &= \frac{4}{+\infty} + (+\infty) = 0 + \infty = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{no hay asíntota horizontal.}$$

oblicua,

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{(x-1)^2} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x(x-1)^2} + 1 \right) = \frac{4}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{(x-1)^2} + x - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{(x-1)^2} \right] = \frac{4}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = x$

Por lo tanto, $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$, **su asíntota vertical es $x = 1$ y su asíntota oblicua $y = x$.**

4.2.2 *Extremos y monotonía de $f(x)$*

Extremos,

$$f'(x) = \frac{-4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8}{(x-1)^3} + 1$$

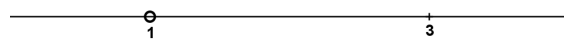
$$f'(x) = 0; \quad \frac{-8}{(x-1)^3} + 1 = 0; \quad \frac{-8}{(x-1)^3} = -1; \quad (x-1)^3 = 8; \quad x-1 = \sqrt[3]{8}; \quad x-1 = 2; \quad x = 3$$

$$f''(x) = \frac{-(-8)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{24}{(x-1)^4}; \quad f''(3) = \frac{24}{(3-1)^4} = \frac{24}{16} > 0 \quad \rightarrow \quad \text{en } x = 3 \text{ hay mínimo relativo.}$$

$$\text{Para } x = 3, \quad f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = 4 \quad \rightarrow \quad \text{Mínimo relativo de } f(x) \text{ el punto } (3, 4).$$

Monotonía,

Tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

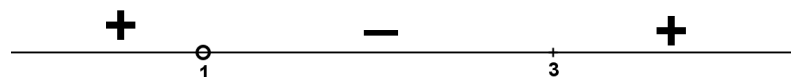


$$x=0, \quad f'(0) = \frac{-8}{(0-1)^3} + 1 = 9 > 0$$

$$x=2, \quad f'(2) = \frac{-8}{(2-1)^3} + 1 = -7 < 0$$

$$x=4, \quad f'(4) = \frac{-8}{(4-1)^3} + 1 = \frac{19}{27} > 0$$

luego, $f(x)$ es decreciente en $(1, 3)$ y creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.



Solución: $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$ y

$f(x)$ es decreciente en $(1, 3)$ y creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

4.2.3 Representación gráfica de $f(x)$.

De $f(x)$ conocemos: $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, asíntota vertical $x = 1$, asíntota oblicua $y = x$, mínimo relativo $(3, 4)$, creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(1, 3)$.

Para representar la función debemos calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

$$x=0, \quad f(0) = \frac{4}{(0-1)^2 + 0} = 4 \rightarrow (0, 4)$$

$$f(x) = 0, \quad \frac{4}{(x-1)^2} + x = 0; \quad 4 + x(x-1)^2 = 0; \quad 4 + x(x^2 - 2x + 1) = 0; \quad 4 + x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$$

Resolviendo esta ecuación por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & & -1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 10 \end{array}$$

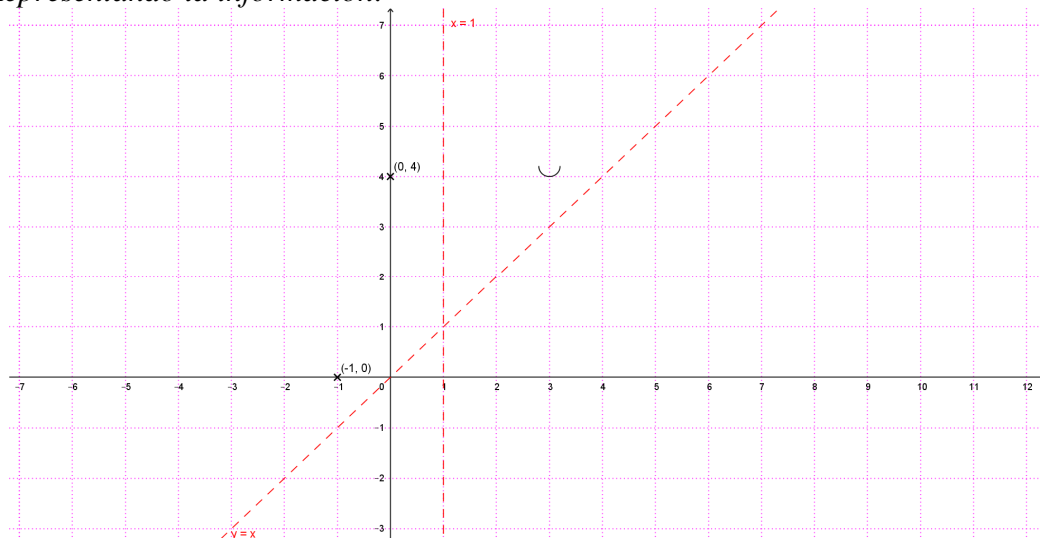
Resolvamos la ecuación de 2º grado que falta,

$$x^2 - 3x + 4 = 0; \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} \quad \text{sin soluciones.}$$

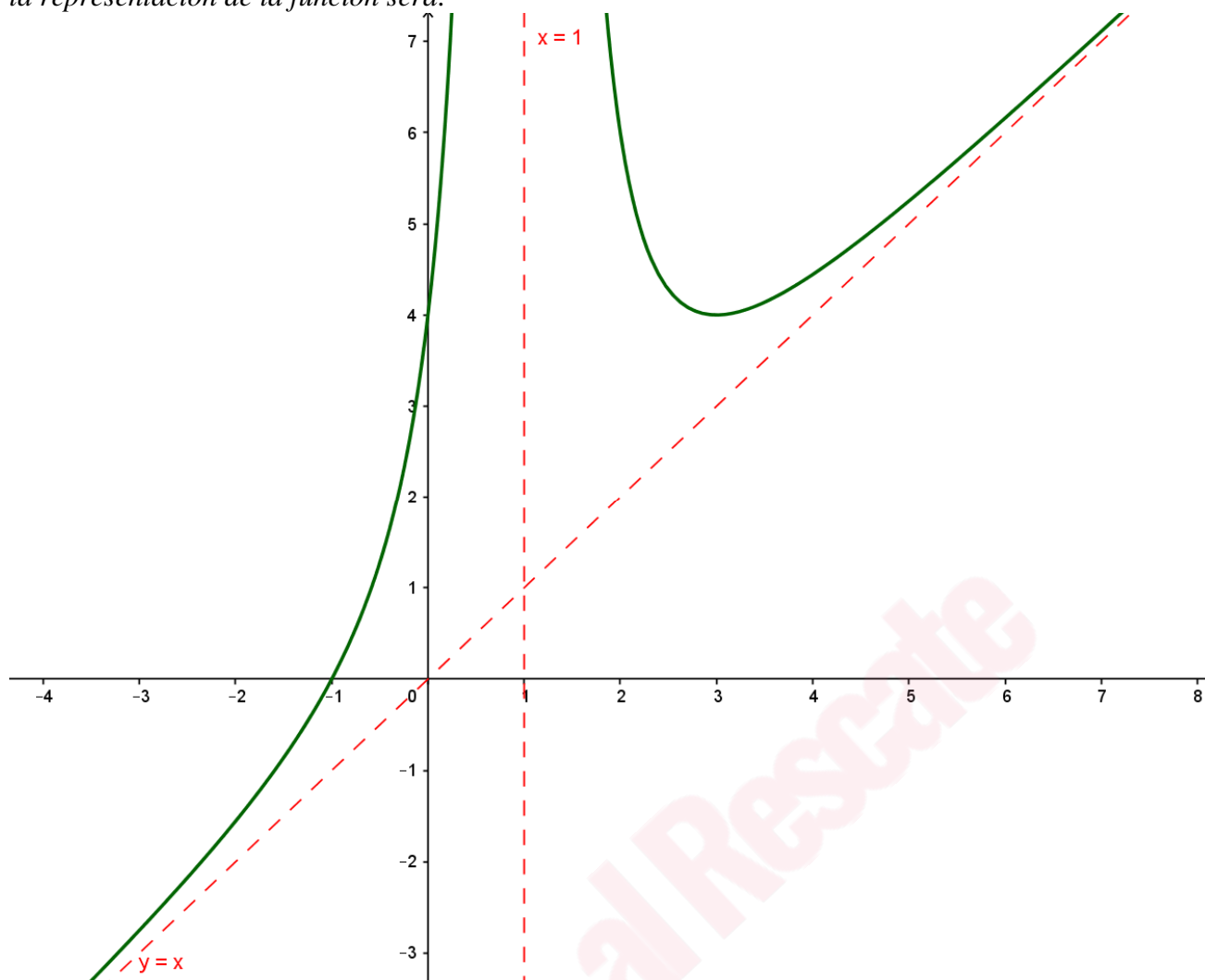
Por lo que, si $f(x) = 0$, $x = -1$

Los puntos de corte con los ejes son: $(0, 4)$ y $(-1, 0)$

Representando la información:



Y la representación de la función será:



4.2.4 Calcular la integral indefinida $\int f(x) dx$.

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) dx = \int \frac{4}{(x-1)^2} dx + \int x dx,$$

$$\int \frac{4}{(x-1)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} \int \frac{4}{t^2} dx = \frac{-4}{t} = \frac{-4}{x-1}$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Por lo que } \int f(x) dx = \frac{-4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C$$