Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG)

Lumen Edu

Introdução

Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG) são sequências numéricas com padrões de crescimento ou decrescimento definidos, sendo temas recorrentes em vestibulares devido às suas diversas aplicações na matemática e em situações do cotidiano. Nesta aula, abordaremos os principais conceitos, fórmulas e métodos para resolução de problemas, do nível básico ao avançado.

—

1 Progressão Aritmética (PA)

Definição

Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica em que a diferença entre termos consecutivos é sempre constante. Essa constante é chamada de *razão* da PA, denotada por r.

Exemplo:

A sequência $2, 5, 8, 11, \ldots$ é uma PA com razão $r = 3$.

Fórmula do Termo Geral da PA

O termo geral de uma PA pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Onde:

- a_n é o n-ésimo termo da PA;
- a_1 é o primeiro termo da PA;
- r é a razão da PA;
- n é a posição do termo na sequência.

Exemplo:

Dada a PA $3, 7, 11, 15, \ldots$, o termo geral é:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$$

O $10^{\underline{o}}$ termo dessa PA será:

$$a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$$

Soma dos Termos de uma PA

A soma dos n primeiros termos de uma PA pode ser obtida pela fórmula:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Ou, substituindo a_n pela fórmula do termo geral:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n - 1)r]$$

Exemplo:

A soma dos 5 primeiros termos da PA $2, 6, 10, 14, \ldots$ é dada por:

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (2 + 14) = \frac{5}{2} \cdot 16 = 40$$

Propriedades Importantes

- O termo central de uma PA finita é a média aritmética dos extremos.
- Se três termos são consecutivos em uma PA, então o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

Exemplo:

Na PA $3, 7, 11$, o termo 7 é a média entre 3 e 11, pois:

$$7 = \frac{3 + 11}{2}$$

—

2 Progressão Geométrica (PG)

Definição

Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que a razão entre termos consecutivos é constante. Essa constante é chamada de *razão* da PG, denotada por q.

Exemplo:

A sequência $3, 6, 12, 24, \ldots$ é uma PG com razão $q = 2$.

Fórmula do Termo Geral da PG

O termo geral de uma PG é dado pela fórmula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde:

- a_n é o n-ésimo termo da PG;
- a_1 é o primeiro termo da PG;
- q é a razão da PG;
- n é a posição do termo na sequência.

Exemplo:

Dada a PG $2, 4, 8, 16, \ldots$, o termo geral é:

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

O 7º termo dessa PG será:

$$a_7 = 2^7 = 128$$

Soma dos Termos de uma PG

A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{se } q \neq 1$$

Exemplo:

A soma dos 4 primeiros termos da PG $3, 6, 12, 24, \ldots$ com razão $q = 2$ é:

$$S_4 = \frac{3 \cdot (2^4 - 1)}{2 - 1} = \frac{3 \cdot (16 - 1)}{1} = 45$$

Soma Infinita de uma PG

Se $|q| < 1$, a soma dos infinitos termos de uma PG pode ser calculada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo:

Para a PG $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, temos:

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

—

3 Problemas Clássicos

Exemplo 1:

Encontre o número de termos de uma PA cuja soma é 210, sendo o primeiro termo igual a 3 e a razão igual a 2.

Solução: Sabemos que a soma dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Sabemos também que:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Substituindo $S_n = 210$, $a_1 = 3$, e $r = 2$:

$$\begin{aligned}
210 &= \frac{n}{2} \cdot (3 + 3 + (n-1) \cdot 2) \\
210 &= \frac{n}{2} \cdot (6 + 2n - 2) \\
210 &= \frac{n}{2} \cdot (2n + 4) \\
420 &= n(2n + 4) \\
420 &= 2n^2 + 4n \\
2n^2 + 4n - 420 &= 0 \\
n^2 + 2n - 210 &= 0
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação quadrática:

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-210)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 840}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{844}}{2}$$

Portanto, $n = 14$ é o número de termos.

—

Exemplo 2:

Determine a soma dos primeiros 10 termos da PG $5, 15, 45, \ldots$.

Solução: Sabemos que a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo $a_1 = 5$, $q = 3$, e $n = 10$:

$$\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{5 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} \\
&= \frac{5 \cdot (59049 - 1)}{2} \\
&= \frac{5 \cdot 59048}{2} = 147620
\end{aligned}$$

—

4 Conclusão

Progressões Aritméticas e Geométricas são ferramentas essenciais na matemática, especialmente em problemas envolvendo sequências e séries. Com a prática constante, você será capaz de identificar rapidamente os padrões e aplicar as fórmulas adequadas para resolver questões em vestibulares.