

PAU Madrid - Matemáticas II

Acceso a la Universidad para mayores de 25 años - UCM, 2025

El examen pide responder una opción completa. Se resuelven ambas para repasar todos los ejercicios.

Opción A. Ejercicio 1. Sistema de ecuaciones

Sean B , C y M los números de bolas, campanitas y muñecos. Traducimos a ecuaciones los datos del enunciado:

$$B + C + M = 46, \quad C + M = \frac{B}{2} + 1, \quad \frac{1}{2}B + C + \frac{7}{2}M = 46.$$

De la primera y la segunda ecuación,

$$46 - B = \frac{B}{2} + 1 \implies \frac{3}{2}B = 45 \implies B = 30.$$

Así, $C + M = 16$. Al sustituir $B = 30$ en la condición del coste:

$$15 + C + \frac{7}{2}M = 46 \implies C + \frac{7}{2}M = 31.$$

Restamos $C + M = 16$ para eliminar C : $\frac{5}{2}M = 15$, luego $M = 6$ y $C = 10$. **Conclusión.** En el árbol hay 30 bolas, 10 campanitas y 6 muñecos de Papá Noel.

Opción A. Ejercicio 2. Función con valor absoluto

La función es

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{1 + |x|}.$$

Como $1 + |x| > 0$ para todo real y la exponencial siempre está definida, el dominio es $\mathbb{R}$. Es útil escribirla por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{1-x}, & x < 0, \\ \frac{e^{-x}}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

a) Continuidad y derivabilidad

En cada tramo la expresión es continua y derivable. En $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

así que f es continua en todo $\mathbb{R}$. Para comprobar la derivabilidad en el punto de cambio, calculamos las derivadas laterales:

$$f'_-(0) = \left. \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} \right|_{x=0} = 2, \quad f'_+(0) = \left. -\frac{e^{-x}(x+2)}{(1+x)^2} \right|_{x=0} = -2.$$

Como no coinciden, f no es derivable en 0. **Conclusión.** f es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable para $x \neq 0$, pero no es derivable en $x = 0$.

b) Paridad

El valor de f solo depende de $|x|$, y $|-x| = |x|$. Por tanto,

$$f(-x) = \frac{e^{-|-x|}}{1+|-x|} = \frac{e^{-|x|}}{1+|x|} = f(x).$$

Conclusión. f es una función par.

c) Extremos relativos

Derivando en cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}, & x < 0, \\ -\frac{e^{-x}(x+2)}{(1+x)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Para $x < 0$ todos los factores de la primera expresión son positivos, así que $f'(x) > 0$. Para $x > 0$, la segunda expresión es negativa. La función crece hasta 0 y decrece después; en consecuencia, alcanza un máximo relativo en el punto de cambio:

$$f(0) = 1.$$

Además $f(x) > 0$ y tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$, pero nunca vale cero; por ello no tiene mínimo. **Conclusión.** El único extremo relativo es un máximo en $(0, 1)$; no hay mínimos relativos.

d) Asíntotas

La función está definida y es continua en toda la recta, por lo que no puede tener asíntotas verticales. En ambos extremos,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Conclusión. La única asíntota es la horizontal $y = 0$, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

Opción A. Ejercicio 3. Paralelepípedo

Sean $\vec{OA} = (1, 0, 0)$, $\vec{OB} = (u, v, 0)$ y $\vec{OC} = (r, s, t)$. Las tres aristas tienen longitud 1, y cada par forma un ángulo de 60° ; por el producto escalar, el producto de dos vectores de longitud uno debe ser $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

a) Coordenadas de B y C

El vértice B está en el plano OXY y en el primer octante, así que $v \geq 0$. De $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{2}$ se obtiene $u = \frac{1}{2}$. Como $|OB| = 1$,

$$\frac{1}{4} + v^2 = 1 \implies v = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Para C , las condiciones con OA y OB dan

$$r = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{1}{2} \implies s = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

La longitud unitaria determina la tercera coordenada, y el primer octante fija su signo:

$$t^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \implies t = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Conclusión. $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ y $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

b) Volumen

El volumen de un paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de sus tres aristas concurrentes:

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Conclusión. El volumen del paralelepípedo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades cúbicas.

Opción A. Ejercicio 4. Probabilidad

Los datos son $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A \cap C) = 0,1$. También se indica que B y C son independientes.

a) Probabilidad condicionada $P(C | A)$

Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(C | A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2 = \frac{1}{5}.$$

Conclusión. $P(C | A) = \frac{1}{5}$.

b) Independencia de A y B

Dos sucesos son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aquí

$$P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 \neq 0,2 = P(A \cap B).$$

Conclusión. A y B no son independientes.

c) Compatibilidad de los datos y valor de $P(C)$

La probabilidad condicionada proporciona

$$P(A | B \cup C) = \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} = \frac{0,36}{P(B \cup C)} = \frac{1}{2},$$

de donde $P(B \cup C) = 0,72$. Si $p = P(C)$, la independencia de B y C da

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B)P(C) = 0,3 + p - 0,3p.$$

Al igualar a 0,72, se obtiene $p = 0,6$. Sin embargo, los datos de las intersecciones con A imponen

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \leq 0,2 + 0,1 = 0,3,$$

lo que contradice el valor 0,36 dado en el enunciado. **Conclusión.** La condición de unión y la independencia fuerzan $P(C) = 0,6$, pero este valor no resuelve el conjunto de datos: el enunciado es inconsistente y no existe una distribución de probabilidad que satisfaga todas sus condiciones.

Opción B. Ejercicio 1. Matriz de Gram y sistema

La matriz dada y su producto son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & -b & -1 \\ -b & b^2 & 2b \\ -1 & 2b & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Invertibilidad de C

La matriz A tiene dos columnas independientes: las filas primera y tercera forman el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

de modo que $\text{rg}(A) = 2$. Al ser $C = AA^T$ de orden 3, su rango es 2 (también se comprueba con el menor de C en las filas y columnas primera y tercera, que vale 9). Por tanto, $\det C = 0$ para todo b . **Conclusión.** C no tiene inversa para ningún valor real de b .

b) Discusión de $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matriz de coeficientes es C y su rango es 2. Para comprobar la compatibilidad cuando $b \neq 0$, observamos que $w = (b, 3, -b)^T$ cumple $A^T w = 0$, así que $w^T C = 0$. Si el sistema tuviera solución, al multiplicarlo por w^T resultaría

$$0 = w^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -b,$$

imposible para $b \neq 0$; es incompatible. Si $b = 0$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

El sistema queda $2x - z = 0$, $0 = 0$ y $-x + 5z = 1$. De la primera, $z = 2x$; en la tercera, $9x = 1$. Así,

$$x = \frac{1}{9}, \quad z = \frac{2}{9}, \quad y \text{ libre.}$$

En este caso $\text{rg}(C) = \text{rg}(C^*) = 2 < 3$, así que hay infinitas soluciones. **Conclusión.** Si $b = 0$, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son $(\frac{1}{9}, t, \frac{2}{9})$; si $b \neq 0$, es incompatible.

Opción B. Ejercicio 2. Crecimiento, raíces y área

Sean $f(x) = x^2 - \pi x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ y

$$F(x) = g(x) - f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + \pi x.$$

a) Crecimiento y decrecimiento de F en $[0, \pi]$

El signo de F' determina la monotonía:

$$F'(x) = \cos x - 2x + \pi, \quad F''(x) = -\operatorname{sen} x - 2 < 0 \quad (0 \leq x \leq \pi).$$

Así, F' es estrictamente decreciente. Como $F'(0) = 1 + \pi > 0$, $F'(\pi) = -(1 + \pi) < 0$ y $F'(\frac{\pi}{2}) = 0$, este es su único cero. Por tanto, F crece hasta $\frac{\pi}{2}$ y decrece después. **Conclusión.** F es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

b) Las únicas soluciones de $f(x) = g(x)$

La igualdad equivale a $x^2 - \pi x = \operatorname{sen} x$. En $0 < x < \pi$, el miembro izquierdo es negativo y el derecho positivo, por lo que no puede haber soluciones; en los extremos $x = 0$ y $x = \pi$ sí hay igualdad. Tampoco aparecen soluciones fuera de ese intervalo. Si $x < 0$, poniendo $t = |x|$ y usando $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$:

$$x^2 - \pi x = t^2 + \pi t > t \geq \operatorname{sen} x.$$

Si $\pi < x < 2\pi$, entonces $x^2 - \pi x > 0$ y $\operatorname{sen} x < 0$. Para $x \geq 2\pi$, $x^2 - \pi x \geq 2\pi^2 > 1 \geq \operatorname{sen} x$. En todos esos casos los miembros son distintos. **Conclusión.** Las únicas soluciones reales son $x = 0$ y $x = \pi$.

c) Área entre las gráficas

En $(0, \pi)$ se cumple $g(x) > f(x)$, así que el área encerrada por las dos curvas es

$$A = \int_0^\pi (g(x) - f(x)) dx = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - x^2 + \pi x) dx.$$

Una primitiva es $-\cos x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2}$; al aplicar la regla de Barrow:

$$A = \left[-\cos x - \frac{x^3}{3} + \frac{\pi x^2}{2} \right]_0^\pi = 2 + \frac{\pi^3}{6}.$$

Conclusión. El área encerrada es $2 + \frac{\pi^3}{6}$ unidades cuadradas.

Opción B. Ejercicio 3. Posición relativa y perpendicular común

De $y - 2z = 0$ resulta $y = 2z$. Tomando $z = t$ en la otra ecuación, la recta r queda

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad \vec{d}_r = (-1, 2, 1).$$

La otra recta ya está en forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 8 - \mu \\ z = -11 + 2\mu \end{cases}, \quad \vec{d}_s = (1, -1, 2).$$

a) Posición relativa

Los vectores directores no son proporcionales. Para comprobar si las rectas se cortan, igualamos coordenadas. La ecuación de x da $\mu = -t$; al sustituir en la ecuación de y , se obtiene $2t = 8 + t$, luego $t = 8$ y $\mu = -8$. Pero la ecuación de z exigiría entonces $8 = -11 + 2(-8) = -27$, una contradicción. Por tanto, no se cortan y tampoco son paralelas. **Conclusión.** Las rectas son alabeadas.

b) Recta perpendicular que corta a r y s

Sean $R = (1 - t, 2t, t) \in r$ y $S = (1 + \mu, 8 - \mu, -11 + 2\mu) \in s$. El vector que une esos puntos es

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (t + \mu, 8 - \mu - 2t, -11 + 2\mu - t).$$

Para que la recta RS sea perpendicular a ambas, imponemos que este vector sea perpendicular a cada vector director:

$$\overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_r = 5 - 6t - \mu = 0, \quad \overrightarrow{RS} \cdot \vec{d}_s = t + 6\mu - 30 = 0.$$

La solución es $t = 0$ y $\mu = 5$. Por tanto, $R = (1, 0, 0)$, $S = (6, 3, -1)$ y

$$\overrightarrow{RS} = (5, 3, -1).$$

Tomando R como punto y ese vector como dirección, la perpendicular común, en forma paramétrica, es

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 5\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = -\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta ℓ corta a ambas rectas y es perpendicular a sus vectores directores.

Opción B. Ejercicio 4. Probabilidad y aproximación normal

a) Probabilidad de que un fallecido de más de 80 años sea hombre

Sean H el suceso "el fallecido es hombre" y E el suceso "tiene más de 80 años". Usamos las frecuencias de decesos por sexo y franja de edad:

$$N(H \cap E) = 17688 \cdot 0,728 = 12876,864, \quad N(\overline{H} \cap E) = 14964 \cdot 0,544 = 8140,416.$$

La probabilidad condicionada es la proporción de hombres entre todos los fallecidos de más de 80:

$$P(H | E) = \frac{12876,864}{12876,864 + 8140,416} = \frac{67067}{109465} \approx 0,61268.$$

Conclusión. La probabilidad es aproximadamente 0,6127.

b) Más muertes de hombres entre 100 decesos de mayores de 80

Sea X el número de hombres entre los 100 fallecidos. Cada caso tiene probabilidad $p = P(H | E) \approx 0,61268$ de ser un hombre, por lo que $X \sim \text{Bin}(100, p)$. Sus parámetros normales de aproximación son

$$\mu = np \approx 61,268, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 4,871.$$

"Más hombres que mujeres" entre 100 personas significa $X \geq 51$. Con corrección de continuidad:

$$P(X \geq 51) \approx P\left(Z > \frac{50,5 - 61,268}{4,871}\right) = P(Z > -2,21) = P(Z < 2,21) \approx 0,9864.$$

Conclusión. La probabilidad aproximada de que haya más decesos de hombres es 0,9864.