

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 5

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que permitan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3, \text{ para } m \in \mathbb{R}. \\ x + 3y + 2z = m \end{cases}$$

a) Explique razonadamente que para cualquier valor del parámetro m el sistema tiene una única solución.

[1 punto]

b) Resuelva el sistema y encuentre la expresión general del punto solución.

[1 punto]

2. Sean el plano de ecuación $\pi: x + y - z = 0$ y el punto $P = (2, 3, 2)$.

a) Calcule el punto simétrico del punto P respecto del plano π .

[1 punto]

b) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) de los dos planos paralelos a π que están a una distancia $\sqrt{3}$ del punto P .

[1 punto]

NOTA: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de

ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión
$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. Sea la función $f(x) = a \cdot e^{-x^2 + bx}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

a) Calcule los valores de a y de b para los cuales la función tiene un extremo relativo en el punto $(1, e)$.

[1 punto]

b) Para el caso $a = 3$ y $b = 5$, calcule la asíntota horizontal de la función f cuando x tiende a $+\infty$.

[1 punto]

4. Se sabe que una función $f(x)$ está definida para todos los números reales y que es derivable dos veces. Se sabe también que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 2$, que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en este punto es $y = -124x + 249$ y que $f(-3) = -4$.

a) Calcule $f''(2)$, $f'(2)$ y $f(2)$.

[1 punto]

b) Calcule $\int_{-3}^2 f'(x) dx$.

[1 punto]

5. Sean las rectas $r_1: x - 1 = \frac{y-2}{-1} = z - 5$ y $r_2: (x, y, z) = (2 - 3\lambda, -1 + \lambda, 2)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que contiene la recta r_1 y es paralelo a la recta r_2 .

[1 punto]

b) Indique qué condición debe cumplirse para que exista un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 . Con las rectas r_1 y r_2 del enunciado, compruebe si existe un plano que contenga la recta r_1 y sea perpendicular a la recta r_2 .

[1 punto]

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Si $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3, calcule para qué valores de k la

matriz $A + kI$ tiene inversa. Encuentre, si existe, la matriz inversa de $A - 2I$.

[1 punto]

b) Calcule la matriz X que satisface la ecuación $X \cdot A + A^T = 2 \cdot X$, donde A^T es la matriz transpuesta de la matriz A .

[1 punto]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés