Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2016--2017 · Convocatoria ordinaria · Enunciado v4

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones con matrices y ecuación matricial

Las dimensiones de las matrices son $A, B, C \in M_{2\times 2}$ y $D \in M_{2\times 3}$. Por tanto, AD tiene tamaño 2×3, mientras que BC tiene tamaño 2×2; no se pueden sumar. Además, D^tB tiene tamaño 3×2 y A^2 es 2×2, así que tampoco se pueden restar. Ninguna de las dos operaciones del apartado a) está definida.

Para el apartado b), la ecuación es $AX = B - C$. Como

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

la matriz A es invertible y podemos multiplicar por A^{-1} a la izquierda. Calculamos

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$X = A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Ninguna operación se puede efectuar; $\quad X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 · Monotonía, extremos y recta tangente

La función $f(x) = x^3 - 12x + 1$ es polinómica, de modo que su dominio es $\mathbb{R}$. El signo de su derivada nos indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2).$$

Los puntos críticos son $x = -2$ y $x = 2$. El signo de los factores en los intervalos determinados por esos valores es

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Por tanto, f crece en $(-\infty, -2)$, decrece en $(-2, 2)$ y vuelve a crecer en $(2, +\infty)$. El cambio de signo de positivo a negativo en -2 da un máximo relativo, y el cambio de negativo a positivo en 2 da un mínimo relativo:

$$f(-2) = 17, \qquad f(2) = -15.$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene pendiente $f'(1)$ y pasa por $(1, f(1))$. Como $f(1) = -10$ y $f'(1) = -9$, la ecuación punto-pendiente es

$$y + 10 = -9(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = -9x - 1.$$

Máximo relativo $(-2, 17)$; mínimo relativo $(2, -15)$; $y_{\text{tangente}} = -9x - 1$.

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada e independencia

Se conocen $P(A) = 0{,}6$, $P(B \mid A) = 0{,}8$ y $P(B \mid A^c) = 0{,}1$. Primero obtenemos las probabilidades conjuntas multiplicando cada probabilidad condicionada por la del suceso que la condiciona:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48,$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B \mid A^c) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04.$$

Las dos ramas son incompatibles y juntas forman el suceso B, así que $P(B) = 0{,}48 + 0{,}04 = 0{,}52$. La unión se calcula restando la intersección para no contarla dos veces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}52 - 0{,}48 = 0{,}64.$$

Para que A y B fueran independientes debería cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Sin embargo,

$$0{,}48 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}52 = 0{,}312,$$

por lo que no son independientes.

$$\boxed{P(B) = 0{,}52; \quad P(A \cap B) = 0{,}48; \quad P(A \cup B) = 0{,}64; \quad A, B \text{ no son independientes.}}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral de establecimientos con menú de precio máximo $12\,€$ es

$$\widehat{p} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3}, \qquad \widehat{q} = 1 - \widehat{p} = \frac{1}{3}.$$

Para un intervalo bilateral de confianza usamos $\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}/n}$. Con confianza del 92%, $z_{0{,}96} \approx 1{,}751$. **a)** El error máximo de estimación vale

$$E = 1{,}751\sqrt{\frac{(2/3)(1/3)}{120}} \approx 0{,}07534.$$

Por tanto,

$$IC_{92\%}(p) = \frac{2}{3} \pm 0{,}07534 \approx [0{,}5913,\ 0{,}7420].$$

b) Al elevar el nivel de confianza aumenta el valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Como el error es ese valor multiplicado por $\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}/n}$, también aumenta el error de estimación.

c) Para confianza del 99%, usamos $z_{0{,}995} \approx 2{,}576$. Exigimos que el error no supere $0{,}04$ y despejamos el tamaño muestral:

$$2{,}576\sqrt{\frac{(2/3)(1/3)}{n}} \leq 0{,}04 \quad \Longrightarrow \quad n \geq \frac{2{,}576^2(2/3)(1/3)}{0{,}04^2} \approx 921{,}63.$$

El menor tamaño entero que satisface la condición es 922.

$$\boxed{IC_{92\%}(p) \approx [0{,}5913, 0{,}7420]; \quad \text{con 99\% aumenta } E; \quad n_{\text{min}} = 922.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Región factible y programación lineal

La región está definida por

$$x + 2y \leq 11, \qquad x \geq 2y - 5, \qquad 3x + y \leq 18, \qquad x, y \geq 0.$$

Sus vértices se obtienen con las intersecciones de las rectas frontera que cumplen todas las restricciones. En los ejes se obtienen $(0,0)$, $(0, \frac{5}{2})$ y $(6,0)$. Las intersecciones factibles de las rectas oblicuas son

$$x + 2y = 11,\ x = 2y - 5 \quad \Longrightarrow \quad (3,4),$$

$$x + 2y = 11,\ 3x + y = 18 \quad \Longrightarrow \quad (5,3).$$

La intersección $x = 2y - 5$ con $3x + y = 18$ no es factible, porque junto con ella se obtiene $x + 2y = \frac{97}{7} > 11$. Así, los vértices son $(0,0)$, $(0, \frac{5}{2})$, $(3,4)$, $(5,3)$ y $(6,0)$.

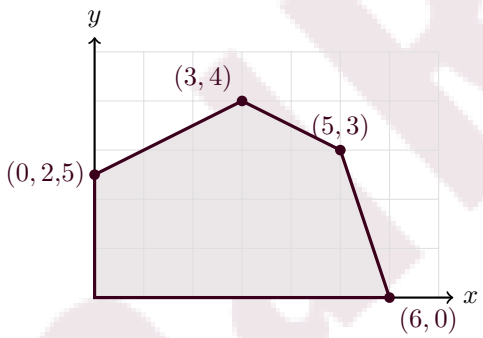
b) El punto $(5{,}5, 2)$ no pertenece al recinto, ya que

$$3(5{,}5) + 2 = 18{,}5 > 18.$$

c) La función objetivo es $F(x,y) = 2x + 3y$. La evaluamos en los vértices:

(x,y)	$(0,0)$	$(0, \frac{5}{2})$	$(3,4)$	$(5,3)$	$(6,0)$
$F(x,y)$	0	$\frac{15}{2}$	18	19	12

El mínimo es 0 en $(0,0)$ y el máximo es 19 en $(5,3)$.



$$F_{\text{min}} = 0 \text{ en } (0,0); \qquad F_{\text{max}} = 19 \text{ en } (5,3).$$

Ejercicio 2 · Condición de extremo y recta tangente

La función es $f(x) = x^3 + ax^2 + b$. Para que haya un extremo relativo en $(2,6)$ deben cumplirse dos condiciones: el punto pertenece a la gráfica, $f(2) = 6$, y la derivada se anula en $x = 2$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax, \qquad f'(2) = 12 + 4a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -3.$$

Con ese valor, la condición de paso por el punto da

$$f(2) = 8 + 4(-3) + b = 6 \quad \Longrightarrow \quad b = 10.$$

Además, $f''(x) = 6x + 2a$ y, con $a = -3$, $f''(2) = 6 > 0$; por tanto, en $(2,6)$ se tiene un mínimo relativo. Para $a = b = 1$, la función es $g(x) = x^3 + x^2 + 1$. En $x = 1$, $g(1) = 3$ y $g'(1) = 3 + 2 = 5$. Por la ecuación punto-pendiente, la tangente es

$$y - 3 = 5(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = 5x - 2.$$

$$a = -3, \quad b = 10; \qquad y_{\text{tangente}} = 5x - 2.$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y Bayes

Sean R el suceso «acudir por un problema respiratorio» y F «ser fumador». Los datos son $P(R) = 0{,}10$, $P(F \mid R) = 0{,}80$ y $P(F \mid R^c) = 0{,}05$. **a)** Acudir por un problema respiratorio y no fumar es una rama del suceso R:

$$P(R \cap F^c) = P(R)P(F^c \mid R) = 0{,}10(1 - 0{,}80) = 0{,}02.$$

b) Para invertir la condición calculamos primero la probabilidad total de ser fumador:

$$P(F) = P(R)P(F \mid R) + P(R^c)P(F \mid R^c) = 0{,}10 \cdot 0{,}80 + 0{,}90 \cdot 0{,}05 = 0{,}125.$$

De los fumadores, la probabilidad conjunta de que no hayan acudido por problema respiratorio es $P(R^c \cap F) = 0{,}90 \cdot 0{,}05 = 0{,}045$. Aplicando Bayes,

$$P(R^c \mid F) = \frac{P(R^c \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}045}{0{,}125} = 0{,}36.$$

$$\boxed{P(R \cap F^c) = 0{,}02; \qquad P(R^c \mid F) = 0{,}36.}$$

Ejercicio 4 · Distribución muestral e intervalo de confianza

El precio individual sigue una normal con media poblacional desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5\,€$. Por ello, para muestras de tamaño $n = 10$, la media muestral sigue

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{10}}\right).$$

La media de los diez precios observados es

$$\bar{x} = \frac{96 + 108 + 97 + 112 + 99 + 106 + 105 + 100 + 98 + 99}{10} = 102\,€.$$

b) Con confianza del 97%, $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$. El error máximo es

$$E = 2{,}170\frac{5}{\sqrt{10}} \approx 3{,}431\,€,$$

y el intervalo queda

$$IC_{97\%}(\mu) = 102 \pm 3{,}431 \approx [98{,}569,\ 105{,}431]\,€.$$

c) Para que el error sea menor que $2\,€$, exigimos $2{,}170 \cdot 5/\sqrt{n} < 2$:

$$n > \left(\frac{2{,}170 \cdot 5}{2}\right)^2 \approx 29{,}43.$$

El menor entero que cumple la condición es 30.

$$\boxed{\overline{X} \sim N\left(\mu, \tfrac{5}{\sqrt{10}}\right); \quad IC_{97\%}(\mu) \approx [98{,}569, 105{,}431]\,€; \quad n_{\text{mín}} = 30.}$$