

MADRID · PAU 2010 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas CCSS

8 ejercicios · 90 min de duración

Instrucciones del examen

El examen incluye tabla $N(0,1)$ como anexo. INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos OPCIONES A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha OPCIÓN. Para la realización de esta prueba podrá utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo. TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 3 puntos

Un Grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir en dos tipos de fondos de inversión, A y B. El fondo de inversión del tipo A tiene una rentabilidad del 4% anual y una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima. El fondo de inversión del tipo B tiene una rentabilidad del 3% anual, deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión. El Grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo A. ¿Qué cantidad debe invertir el Grupo en cada tipo de fondo para obtener el máximo beneficio anual? Calcúlese dicho beneficio máximo.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 3 puntos

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) 1 punto

Calcúlese los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .

b) 1 punto

Para $a = -1$, calcúlese la matriz inversa A^{-1} .

c) 1 punto

Para $a = 0$, calcúlese todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 3 puntos

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

a) 1 punto

Determinése la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

b) 1 punto

Determinése los extremos relativos de f y esbócese su gráfica.

c) 1 punto

Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x + 1$.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 3 puntos

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) 1 punto

Calcúlense a y b para que la función f sea continua en todos los puntos.

b) 0,75 puntos

¿Existen valores de a para los cuales f es derivable en $x = 3$? Razónese la respuesta.

c) 1,25 puntos

Para $a = 4, b = -1$ calcúlese la integral definida $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos, 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar.

a) 1 punto

¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería?

b) 1 punto

Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,6$. Calcúlese $P(A \cap \overline{B})$ en cada uno de los siguientes casos:

a) 0,5 puntos

A y B son mutuamente excluyentes.

b) 0,5 puntos

$A \subset B$.

c) 0,5 puntos

$B \subset A$ y $P(B) = 0,3$.

d) 0,5 puntos

$P(A \cap B) = 0,1$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Para medir el coeficiente de inteligencia μ de un individuo, se realizan tests cuya calificación X se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de media igual a μ y desviación típica igual a 15. Un cierto individuo realiza 9 tests con independencia.

a) 1 punto

Si la calificación media de dichos tests es igual a 108, determínese un intervalo de confianza al 95% para su coeficiente de inteligencia μ .

b) 1 punto

Si el individuo que ha realizado los 9 tests tiene un coeficiente de inteligencia $\mu = 110$, ¿cuál es la probabilidad de que obtenga una calificación media muestral mayor que 120?

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

El saldo en cuenta a fin de año de los clientes de una cierta entidad bancaria se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 400 euros. Con el fin de estimar la media del saldo en cuenta a fin de año para los clientes de dicha entidad, se elige una muestra aleatoria simple de 100 clientes.

a) 1 punto

¿Cuál es el nivel máximo de confianza de la estimación si se sabe que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional es menor o igual que 66 euros?

b) 1 punto

Calcúlese el tamaño mínimo necesario de la muestra que ha de observarse para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 40 euros, con un nivel de confianza del 95%.