

Modelo 1 de 2005

Polinomios, integrales, matrices, asíntotas y geometría del espacio.

Opción A - Ejercicio 1

La condición de inflexión en $x = 0$ implica $f''(0) = 0$. Como $f''(x) = 6ax + 2b$, resulta $b = 0$. El máximo en $x = -1$ exige $f'(-1) = 0$, y la pendiente de la tangente en $x = 2$ exige $f'(2) = 9$:

$$3a + c = 0, \quad 12a + c = 9.$$

De aquí $a = 1$ y $c = -3$. Finalmente, $f(-2) = 0$ da $-8 + 6 + d = 0$, luego $d = 2$. Comprobamos que $f''(-1) = -6 < 0$, así que allí sí hay un máximo. Por tanto,

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -3, \quad d = 2.$$

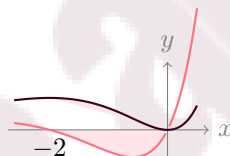
Opción A - Ejercicio 2

Derivamos $f(x) = x^2 e^x$:

$$f'(x) = e^x(x^2 + 2x) = x(x + 2)e^x.$$

La función f es no negativa, se anula en $x = 0$, tiene un máximo local en $x = -2$ y crece sin cota al avanzar hacia $+\infty$. La derivada se anula en $x = -2$ y $x = 0$ y es negativa entre esos valores. Por eso, en el dibujo la curva 2 representa f y la curva 1 representa f' . En $[-2, 0]$, f está por encima de f' . El área sombreada es

$$S = \int_{-2}^0 (f(x) - f'(x)) dx = \int_{-2}^0 (-2x)e^x dx = [-2(x-1)e^x]_{-2}^0 = \boxed{2 - \frac{6}{e^2}}.$$



Opción A - Ejercicio 3

(a) $\det A = 2(-2) - 3 = -7 \neq 0$, así que existe la inversa. Para una matriz 2×2 , se intercambian los elementos diagonales y se cambian de signo los otros dos, dividiendo por el determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}}.$$

(b) Despejamos X de $AX + CB^t = BB^t$:

$$X = A^{-1}(BB^t - CB^t).$$

Calculamos cada producto por separado:

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}, \quad CB^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$X = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4/7 & 6/7 \\ 1/7 & -26/7 \end{pmatrix}}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r se puede parametrizar tomando $y = t$:

$$r : (x, y, z) = (6, 0, 2) + t(-2, 1, 0).$$

Sea $Q = (6, 0, 2)$ y $d = (-2, 1, 0)$. El vector $P - Q = (-4, 0, -1)$ junto con d determina el plano; un normal es $d \times (P - Q) = (-1, -2, 4)$. Usando Q para fijar el término independiente, el plano es

$$x + 2y - 4z + 2 = 0.$$

Para reflejar P en la recta, hallamos primero su proyección ortogonal H . El parámetro de la proyección es $t = ((P - Q) \cdot d) / |d|^2 = 8/5$, de modo que

$$H = Q + \frac{8}{5}d = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}, 2\right).$$

Como H es el punto medio entre P y su simétrico P' , $P' = 2H - P$. Por tanto,

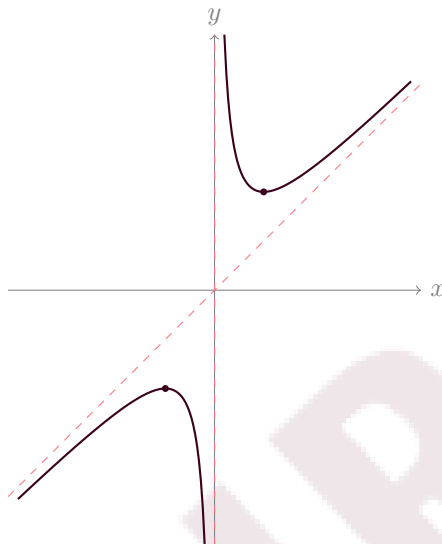
$$P' = \left(\frac{18}{5}, \frac{16}{5}, 3\right).$$

Opción B - Ejercicio 1

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $x = 0$, los límites laterales de $f(x) = x + 1/x$ son $-\infty$ y $+\infty$, así que $x = 0$ es asíntota vertical. En los extremos,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0,$$

por lo que la asíntota oblicua en ambos sentidos es $y = x$; no hay asíntotas horizontales. La derivada $f'(x) = 1 - 1/x^2$ se anula en $x = \pm 1$. Su signo da crecimiento en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y decrecimiento en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. Hay un máximo local en $(-1, -2)$ y un mínimo local en $(1, 2)$.



Opción B - Ejercicio 2

En $x = 0$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = -1/2$, por lo que la tangente es $y = 1 - x/2$. Como $f''(x) = e^{-x/2}/4 > 0$, la gráfica de f queda por encima de esa tangente. El área entre ambas desde $x = 0$ hasta $x = 2$ es

$$S = \int_0^2 \left(e^{-x/2} - 1 + \frac{x}{2} \right) dx = \left[-2e^{-x/2} - x + \frac{x^2}{4} \right]_0^2 = \boxed{1 - \frac{2}{e}}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y su determinante son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Si $\lambda \neq -1, -2$, el determinante es distinto de cero y el sistema es SCD. Para $\lambda = -1$, la matriz ampliada tiene rango 3 mientras que A tiene rango 2, así que es SI. Para $\lambda = -2$, ambos rangos son $2 < 3$; por Rouché-Frobenius es SCl. Al resolver las dos ecuaciones independientes, tomando $z = t$,

$$x = 1 - 2t, \quad y = t - 3.$$

Así, en el caso compatible indeterminado,

$$(x, y, z) = (1 - 2t, t - 3, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Se tiene $v_3 = v_1 + v_2$, así que los tres vectores son linealmente dependientes. Para que $(4, a + 3, -2) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ basta considerar el plano generado por v_1, v_2 , ya que v_3 ya pertenece a él. Escribiendo $\alpha v_1 + \beta v_2 = (2\beta, \alpha + \beta, -\beta)$, las coordenadas primera y tercera exigen $\beta = 2$, y la segunda queda satisfecha eligiendo $\alpha = a + 1$. Por tanto, sirve $\boxed{\text{todo } a \in \mathbb{R}}$. Un vector perpendicular a v_1 y v_2 se obtiene con el producto vectorial:

$$v_1 \times v_2 = (-1, 0, -2), \quad |v_1 \times v_2| = \sqrt{5}.$$

Al dividir por su módulo se obtiene el vector unitario pedido, por ejemplo

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2).$$