

Extraordinaria de reserva de 2022

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

El desarrollo en 0 da $\sin x = x + o(x^2)$ y $x \ln(1+x) = x^2 + o(x^2)$. El numerador comienza por $ax + (1+b)x^2 + o(x^2)$, mientras que el denominador es $x^2(1+x)$. Para que el límite sea finito, primero debe ser $a = 0$. Entonces el límite es $1 + b = 2$, de donde $a = 0, b = 1$.

Ejercicio 2

Derivamos $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$:

$$f'(x) = 2e^x \cos x.$$

Los puntos críticos del intervalo son $\pi/2$ y $3\pi/2$. Además de ellos, comparamos los extremos 0 y 2π :

$$f(0) = 1, \quad f(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad f(3\pi/2) = -e^{3\pi/2}, \quad f(2\pi) = e^{2\pi}.$$

El máximo absoluto es $e^{2\pi}$ en $x = 2\pi$ y el mínimo absoluto es $-e^{3\pi/2}$ en $x = 3\pi/2$.

En $x = 3\pi/2$, la pendiente es 0 y la ordenada $-e^{3\pi/2}$. La tangente es $y = -e^{3\pi/2}$ y la normal, vertical, es $x = 3\pi/2$.

Ejercicio 3

En $x = 0$, la curva $y = x^3 - x$ tiene pendiente -1 , por lo que su normal es $y = x$. Los cortes entre ambas son $x^3 - x = x$, es decir, $x = 0, \pm\sqrt{2}$. El área total de los dos recintos es

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3) dx = 2 \left[x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2.$$

Ejercicio 4

Con $t = \sqrt{1+x}$, $x = t^2 - 1$ y $dx = 2t dt$. Los límites $x = 0, 3$ corresponden a $t = 1, 2$:

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = 2 \int_1^2 (t^2 - 1) dt = 2 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^2 = \frac{8}{3}.$$

Ejercicio 5

Los seguidores A, B, C satisfacen

$$A + B + C = 13000, \quad \frac{2}{3}C = 2A, \quad A + \frac{B}{5} = \frac{C}{2}.$$

De la segunda, $C = 3A$; la tercera da $B = 5A/2$. Al sustituir en la primera se obtiene $A = 2000$, y por tanto $B = 5000$, $C = 6000$. Alberto tiene 2000 seguidores, Begoña 5000 y Carlos 6000.

Ejercicio 6

El determinante de A es $(m-1)(m+1)$. Para $m \neq \pm 1$, el rango es 3; para $m = 1$ o $m = -1$, el determinante se anula pero hay un menor de orden dos no nulo, así que el rango es 2.

Para $m = 0$, A es invertible y

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7

Los vectores desde A son $\overrightarrow{AB} = (m, -2, -2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -1, -1)$. Su producto vectorial es $(0, m-4, 4-m)$, cuyo módulo vale $\sqrt{2}|m-4|$. El área es la mitad de ese módulo; imponerla igual a $\sqrt{18}/2$ da $|m-4| = 3$, así que $m = 1$ o 7 .

Para $m = 0$, $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -1, -1)$. El producto escalar es 4 y los módulos son $2\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$; por ello,

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ejercicio 8

Los vectores directores del plano son $(9, 2, 4)$ y $(3, 0, 1)$; su producto vectorial da el normal $(2, 3, -6)$. Con el punto $(0, -1, 3)$, el plano queda $2x + 3y - 6z + 21 = 0$.

En $P = (2, 0, -4)$, el numerador de la distancia al plano es $|4 + 24 + 21| = 49$ y el módulo del normal es 7. Así, $d(P, \pi) = 7$. El pie es $H = P - (49/49)(2, 3, -6) = (0, -3, 2)$ y el simétrico

$$P' = 2H - P = (-2, -6, 8).$$