

Resolución de los siete ejercicios, con desarrollo de los apartados obligatorios y optativos.

Ejercicio 1

En el primer tramo, $f(x) = 1 - e^x$ es decreciente; en el segundo, $f(x) = 2x - 1 - e$ es creciente. En $x = 1$, los valores laterales coinciden:

$$1 - e = 2 - 1 - e,$$

así que f es continua. Las derivadas laterales son $-e$ y 2 , distintas, por lo que no es derivable en $x = 1$.

El dominio es el intervalo cerrado $[0, 2]$. En $[0, 1]$ decrece desde $f(0) = 0$ hasta $f(1) = 1 - e$; en $[1, 2]$ crece hasta $f(2) = 3 - e$. Por tanto, el mínimo absoluto es $f(1) = 1 - e$ y el máximo absoluto es $f(2) = 3 - e$.

Ejercicio 2

Usamos el cambio sugerido $t = x^2 - 3$, de modo que $dt = 2x dx$. Además,

$$x^4 - 6x^2 + 10 = (x^2 - 3)^2 + 1 = t^2 + 1.$$

Los límites se transforman en $t = 0$ y $t = 1$. Así,

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{4x}{x^4 - 6x^2 + 10} dx = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = 2[\arctan t]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

Ejercicio 3

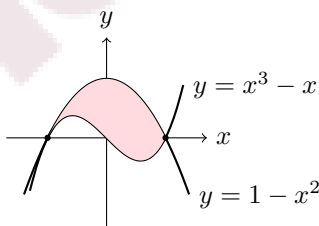
Igualamos las funciones para hallar los puntos de corte:

$$x^3 - x = -x^2 + 1 \iff (x+1)^2(x-1) = 0.$$

Los puntos son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Para $-1 < x < 1$,

$$g(x) - f(x) = 1 + x - x^2 - x^3 = (1-x)(x+1)^2 > 0,$$

por lo que g queda por encima de f . El recinto es el comprendido entre las dos curvas en $[-1, 1]$; el esbozo muestra ese orden.



El área geométrica es

$$A = \int_{-1}^1 (g - f) dx = \int_{-1}^1 (1 + x - x^2 - x^3) dx = 2 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Ejercicio 4

Calculamos las primeras potencias para comprobar el patrón:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = -I.$$

Por tanto, $A^{-1} = -A^2$. Además, las potencias se repiten cada tres exponentes; como 2025 es múltiplo de 3,

$$\boxed{A^{-1} = -A^2}, \quad \boxed{A^{2025} = (A^3)^{675} = -I}.$$

Ejercicio 5

Sea M la matriz del determinante dado, con $\det M = 1$.

a) Las filas de la matriz pedida son $F_1 + F_2$, F_1 y $2F_1 + F_3$. Restamos la segunda fila a la primera y dos veces la segunda a la tercera; queda el orden de filas F_2, F_1, F_3 , que tiene un intercambio respecto de M . El determinante es $\boxed{-1}$.

b) La matriz pedida se obtiene de M^t permutando cíclicamente las filas (lo que conserva el determinante) y después intercambiando sus dos primeras columnas (lo que cambia el signo). Como $\det M^t = \det M = 1$, el resultado es $\boxed{-1}$.

Ejercicio 6

El plano π tiene normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Para reflejar $A = (1, 2, 0)$, usamos $A' = A - 2 \frac{\vec{n} \cdot A + 1}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$. Como $\vec{n} \cdot A + 1 = 4$ y $\|\vec{n}\|^2 = 3$,

$$A' = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{8}{3} \right).$$

Para construir el plano por A y B , necesitamos un vector normal perpendicular tanto a $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0)$ como a $\vec{n}$. El producto vectorial entrega $(1, 2, -3)$. Al usar A para determinar el término independiente, queda

$$x + 2y - 3z - 5 = 0.$$

Ejercicio 7

Sean E, M, A los sucesos de elegir café expreso, medio o americano; D indica descafeinado. El porcentaje de descafeinado depende del tipo:

$$P(D | E) = 0.82, \quad P(D | M) = 0.69, \quad P(D | A) = 0.89.$$

La probabilidad conjunta de expreso descafeinado es

$$P(E \cap D) = P(E)P(D | E) = 0.29 \cdot 0.82 = \boxed{0.2378}.$$

Por la probabilidad total,

$$P(D) = 0.29(0.82) + 0.51(0.69) + 0.20(0.89) = 0.7677.$$

Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(E | D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0.2378}{0.7677} \approx \boxed{0.3098}.$$

La probabilidad es aproximadamente 30.98%.