

Convocatoria extraordinaria, suplente 1, de 2025

Resolución de los siete ejercicios, con desarrollo de los apartados obligatorios y optativos.

Ejercicio 1

Dividimos $x^3 + 1$ entre $x^2 + 1$ para separar una parte sencilla:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1 - x}{x^2 + 1}.$$

Integramos término a término, usando $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$ y la sustitución $u = x^2 + 1$ en el segundo término:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

La condición $F(0) = 5$ da $C = 5$. Por tanto,

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 5.$$

Ejercicio 2

Para estudiar el punto $x = 0$, escribimos la función sin valor absoluto en cada lado:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{-2}, & -1 < x \leq 0, \\ (1-x)^{-2}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Ambos límites laterales y $f(0)$ valen 1, de modo que f es continua en 0; en el resto de su dominio es una función racional continua. Las derivadas laterales en 0 son

$$f'_-(0) = -\frac{2}{(1+x)^3} \Big|_{x=0} = -2, \quad f'_+(0) = \frac{2}{(1-x)^3} \Big|_{x=0} = 2.$$

No coinciden, así que f no es derivable en 0.

Como $0 < 1 - |x| \leq 1$, se tiene $f(x) = 1/(1 - |x|)^2 \geq 1$, con igualdad solo en $x = 0$. Por tanto, el mínimo absoluto es $f(0) = 1$. Al acercarnos a cualquiera de los extremos del dominio, $f(x) \rightarrow +\infty$, por lo que no existe máximo absoluto.

Ejercicio 3

En su dominio, $f(x) = \ln(x^2/e) = 2 \ln |x| - 1$, de donde $f'(x) = 2/x$. La pendiente de la normal en $x = a$ es $-1/f'(a) = -a/2$, mientras que la pendiente de la tangente a $g(x) = x^3 + 2$ en ese mismo valor es $g'(a) = 3a^2$. La condición de paralelismo da

$$-\frac{a}{2} = 3a^2 \implies a(6a + 1) = 0.$$

Como el enunciado exige $a \neq 0$, resulta $a = -\frac{1}{6}$.

El signo de $f'(x) = 2/x$ determina la monotonía: es negativo en $(-1, 0)$ y positivo en $(0, 1)$. Así, f decrece en $(-1, 0)$ y crece en $(0, 1)$.

Ejercicio 4

Calculamos las potencias bajas para detectar el ciclo:

$$A^2 = -I, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = I.$$

Las potencias se repiten cada cuatro exponentes. Como $31 = 4 \cdot 7 + 3$,

$$A^4 = I, \quad A^{31} = A^3 = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, $25 \equiv 1 \pmod{4}$, así que $A^{25} = A$, y $(A^t)^4 = (A^4)^t = I$. Por la propiedad del determinante,

$$\det(4A^{25}(A^t)^4) = 4^2 \det(A) = 16,$$

pues A es 2×2 y $\det A = 1$. El determinante pedido es $\boxed{16}$.

Ejercicio 5

Tomamos determinantes en $X^3AX^2 = B^2$ y usamos $\det(UV) = \det U \det V$:

$$(\det X)^5 \det A = (\det B)^2.$$

Como $\det A = 2$ y $\det B = 4$, resulta $(\det X)^5 = 8$, luego

$$\det X = \sqrt[5]{8}.$$

Para la segunda ecuación, multiplicamos $A^3YB^{-1} = A^2$ por B a la derecha y por A^{-3} a la izquierda. Así, $Y = A^{-1}B$. Con

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

La recta es la intersección de dos planos y pasa por el origen. Un vector director se obtiene como producto vectorial de sus normales, y es $\vec{d} = (-2, 1, 1)$. Para la distancia del punto $P = (2, 1, 0)$ a la recta por el origen usamos

$$d(P, r)^2 = \|P\|^2 - \frac{(P \cdot \vec{d})^2}{\|\vec{d}\|^2}.$$

Aquí $\|P\|^2 = 5$, $P \cdot \vec{d} = -3$ y $\|\vec{d}\|^2 = 6$, de modo que

$$d(P, r) = \sqrt{5 - \frac{9}{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}.$$

Un plano que contiene a r y a P tiene como direcciones $\vec{d}$ y $\overrightarrow{OP} = (2, 1, 0)$. Un normal es su producto vectorial $(-1, 2, -4)$; como el plano pasa por el origen, su ecuación puede escribirse

$$\boxed{x - 2y + 4z = 0}.$$

Ejercicio 7

Sea D el suceso «defectuoso». Por la regla de la probabilidad total,

$$P(D) = 0.20(0.07) + 0.50(0.06) + 0.30(0.02) = 0.05.$$

La probabilidad de no ser defectuoso es 0.95. Para que el bolígrafo sea de Almería y no defectuoso, la probabilidad conjunta es $0.20(1 - 0.07) = 0.186$. Por probabilidad condicionada,

$$P(\text{Almería} \mid \overline{D}) = \frac{0.186}{0.95} = \frac{93}{475} \approx 0.1958.$$

La probabilidad pedida es $\boxed{\frac{93}{475} \approx 19.58\%}$.