

PROBLEMA A.1. Se da el sistema
$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases}, \text{ donde } \alpha \text{ es un parámetro real.}$$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La solución del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 puntos)
 - El valor de α para el que el sistema es incompatible. (3 puntos)
 - Los valores del parámetro para los que el sistema es compatible y determinado (2 puntos)
- y obtener la solución del sistema en función del parámetro α . (2 puntos)

Solución:

Estudiamos el sistema. La matriz ampliada del sistema es:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & \alpha & -5 & -4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} A \text{ es } 3 \times 3, \text{ máximo rango de } A \text{ es } 3. \\ A' \text{ es } 3 \times 4, \text{ máximo rango de } A' \text{ es } 3 \end{array}$$

Empezamos estudiando el rango de A,

$$|I| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -10 - 6\alpha + 6 - 8 - 3\alpha - 15 = -9\alpha - 27$$

$$-9\alpha - 27 = 0 \rightarrow -9\alpha = 27 \rightarrow \alpha = \frac{27}{-9} = -3$$

Por tanto, para $\alpha \neq -3 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$ y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A') = 3$

Para $\alpha = -3 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$, veamos que ocurre con el rango de A' .

Falta por calcular el menor de orden 3 de A' que se obtiene a partir del menor de orden 2 anterior no nulo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = F_2 + F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2(2 - 20) = -36 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego,

para $\alpha \neq -3 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado.}$

para $\alpha = -3 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq 3 = \text{ran}(A') \rightarrow \text{Sistema Incompatible.}$

Resolvamos cada uno de los apartados.

a) ¿Solución para $\alpha = 0$?

$\alpha = 0 \neq -3 \rightarrow \text{el sistema es compatible y determinado.}$

$$\text{El sistema a resolver es: } \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - 5z = -4 \end{cases} \quad |A| = -9\alpha - 27|_{\alpha=0} = -27$$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-20 - 12 + 16 - 10}{-27} = \frac{-26}{-27} = \frac{26}{27}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{10 + 24 + 12 + 8 + 12 - 30}{-27} = \frac{36}{-27} = -\frac{4}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-27} = \frac{-8 - 4 - 8 - 12}{-27} = \frac{-32}{-27} = \frac{32}{27}$$

Finalmente, para $\alpha = 0$ la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \frac{26}{27} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \frac{32}{27} \end{cases}$$

b) Según lo estudiado al principio, el sistema es incompatible para $\alpha = -3$.

c) Según lo estudiado inicialmente, el sistema es compatible y determinado para $\alpha \neq -3$

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases} \quad |A| = -9\alpha - 27$$

Resolvemos el sistema por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & \alpha & -5 \end{vmatrix}}{-9\alpha - 27} = \frac{-20 - 4\alpha - 12 + 16 - 6\alpha - 10}{-9\alpha - 27} = \frac{-26 - 10\alpha}{-9\alpha - 27} = \frac{10\alpha + 26}{9\alpha + 27}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}}{-9\alpha - 27} = (\text{obtenido en a}) = \frac{36}{-9\alpha - 27} = \frac{36}{-9(\alpha + 3)} = \frac{-4}{\alpha + 3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-9\alpha - 27} = \frac{-8 - 6\alpha - 4 - 8 + 2\alpha - 12}{-9\alpha - 27} = \frac{-32 - 4\alpha}{-9\alpha - 27} = \frac{4\alpha + 32}{9\alpha + 27}$$

Finalmente, para $\alpha \neq -3$ la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \frac{10\alpha + 26}{9\alpha + 27} \\ y = \frac{-4}{\alpha + 3} \\ z = \frac{4\alpha + 32}{9\alpha + 27} \end{cases}$$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA A.2. Se dan los puntos $A = (0,0,1)$, $B = (1,0,-1)$, $C = (0,1,-2)$ y $D = (1,2,0)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- La ecuación del plano π que contiene a los puntos A , B y C . (3 puntos)
- La justificación de que los cuatro puntos A , B , C y D , no son coplanarios. (2 puntos)
- La distancia del punto D al plano π ,
y el volumen del tetraedro cuyos vértices son A , B , C y D . (2 puntos)
(3 puntos)

Solución:

a) ¿plano π que contiene los puntos A , B y C ?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(0,0,1) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}(0,1,-3) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z-1+2x+3y=0 \rightarrow 2x+3y+z-1=0$$

Por tanto, la ecuación del plano π : $2x + 3y + z - 1 = 0$

b) Justificar que los puntos A , B , C y D no son coplanarios.

Veamos que el punto D no pertenece al plano π

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 &= 0 \\ 2 + 6 - 1 &= 0 \\ 7 &= 0 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

El punto D no pertenece al plano π , al que pertenecen los puntos A , B y C .

Por lo que **los puntos A , B , C y D no son coplanarios.**

c) ¿ $d(D, \pi)$?

$$d(D, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \text{ u.l.} \cong 1.8708 \text{ u.l.}$$

El volumen del tetraedro de vértices A , B , C y D podemos obtenerlo de dos formas:

i) Mediante la fórmula: $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CD}|$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= (1,2,-1) \\ \overrightarrow{BD} &= (0,2,1) \\ \overrightarrow{CD} &= (1,1,2) \end{aligned} \right\} V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{CD}| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |4 + 2 + 2 - 1| = \frac{1}{6} 7 = \frac{7}{6} u^3$$

ii) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A , B y C que está sobre el plano π , y la altura del tetraedro es $d(D, \pi)$.

El área del triángulo de vértices A , B y C la calculamos mediante la fórmula:

$$\text{Área}_T = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (2, 3, 1)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\text{Área}_T = \frac{1}{2} \sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \text{Área}_T \cdot h = \frac{1}{3} \text{Área}_T \cdot d(D, \pi) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{14}}{2} \frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es $7/6 \ u^3$.

Tu Profecia al Rescate

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa el valor absoluto de x . Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. (2 puntos)
- La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. (1 punto)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f , y el extremo relativo de la función f , justificando si es máximo o mínimo. (2 puntos)
- La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$. (1 punto)
- Las integrales definidas $\int_{-1}^0 f(x) dx$ y $\int_0^2 f(x) dx$. (1,5 + 1,5 puntos)

Solución:

a) Puntos de corte con ejes coordenados.

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 + |0| = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + |x| = 0$$

$$\text{Para } x < 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} \text{ soluciones no válidas porque } x \text{ debe ser negativo.}$$

$$\text{Para } x \geq 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases} (x = -1 \text{ no válida porque } x \text{ debe mayor o igual que cero}).$$

Solución: $x = 0$

El único punto de corte con los ejes coordenados es $(0, 0)$.

b) Para que la curva $y = f(x)$ sea simétrica respecto al ejes de ordenadas debe cumplir $f(x) = f(-x)$.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 + |x| \\ f(-x) &= (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) = f(-x)$$

Luego, la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas.

c) Monotonía y extremos de $f(x)$

Para resolver este apartado es conveniente expresar $f(x)$ como función definida a trozos.

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Obtengamos $f'(x)$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \quad f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

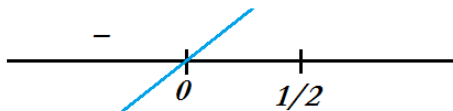
$$\text{Luego, } f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$,

Para $x < 0$,

$$2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = 1/2$$

$2x - 1$ es una recta de pendiente positiva que pasa por el punto $(1/2, 0)$, por tanto:



Es decir, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$. Y, considerando que la función es simétrica respecto del eje de ordenadas, deducimos que la función es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

Como $f(x)$ es decreciente a la izquierda de $x = 0$ y creciente a la derecha, en $x = 0$ hay un mínimo relativo, que además es el absoluto por lo dicho anteriormente.

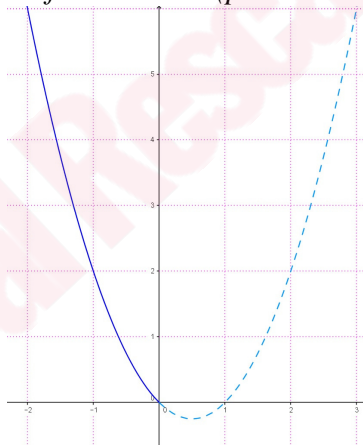
Luego, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Y en el punto $(0, 0)$ hay un mínimo relativo.

d) Representación gráfica de $f(x)$.

Como $f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas, representamos la función para valores de $x < 0$ y para $x > 0$ la representamos por simetría.

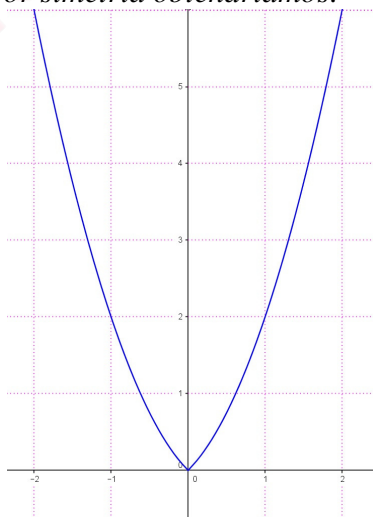
Anteriormente obtuvimos
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$, $f(x) = x^2 - x$. Esta función es una parábola de la que obtuvimos, en el apartado a), sus puntos de corte con el eje de abscisas: $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y su forma es $\cup$ (por ser el coeficiente de x^2 positivo)



Luego para $x < 0$ la representación de $f(x)$ es:

Completando la representación de $f(x)$ por simetría obtendríamos:



La representación de $y = f(x)$ es:

e) $f(x)$ es
$$\begin{array}{c} x^2 - x \quad \quad x^2 + x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} \right) = - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} \right) = - \left(\frac{-5}{6} \right) = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^2 + x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right) - 0 = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{14}{3}$$

Tu Profe al Rescate

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El determinante de las matrices $A \cdot (2(B)^2)$ (1,5 puntos) y $A \cdot (2(B)^2) \cdot (3A)^{-1}$ (1,5 puntos)
- Las matrices A^{-1} (2 puntos) y $((B \cdot A)^{-1} \cdot B)^{-1}$ (2 puntos)
- La solución de la ecuación matricial $A \cdot X + B \cdot X = 3I$. (3 puntos)

Solución:

En la resolución del problema utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| |B|, \quad |A^n| = |A|^n, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \quad |n A| = \{ \text{por ser } A \text{ } 3 \times 3 \} = n^3 |A|$$

a) Calculemos, en primer lugar, $|A|$ y $|B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{F_2 - F_1\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1; \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 = 5$$

$$|A \cdot (2(B)^2)| = |A| |2(B)^2| = |A| |2 B^2| = |A| 2^3 |B^2| = |A| \cdot 8 \cdot |B|^2 = -1 \cdot 8 \cdot 5^2 = -200$$

$$|A \cdot (2(B)^2) \cdot (3A)^{-1}| = |A \cdot (2(B)^2)| |(3A)^{-1}| = -200 \cdot |(3A)^{-1}| = -200 \cdot \frac{1}{|3A|} = -200 \cdot \frac{1}{3^3 |A|} =$$

$$= -200 \cdot \frac{1}{27(-1)} = \frac{200}{27}$$

b) Para que exista A^{-1} debe ser $|A| \neq 0$, como hemos calculado en el apartado anterior $|A| = -1 \neq 0$.
Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para el obtener la siguiente matriz aplicamos la siguiente propiedad $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$\left((B \cdot A)^{-1} \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \left((B \cdot A)^{-1}\right)^{-1} = B^{-1} (B \cdot A) = B^{-1} \cdot B \cdot A = I \cdot A = A$$

c) ¿X? / $A \cdot X + B \cdot X = 3I$.

$$A \cdot X + B \cdot X = 3I,$$

$(A + B)X = 3I$, si existe $(A + B)^{-1}$ entonces multiplicando por la derecha por ella,

$$(A + B)^{-1} (A + B)X = (A + B)^{-1} 3I$$

$$I X = (A + B)^{-1} 3I$$

$$X = (A + B)^{-1} 3I$$

Comprobemos que existe $(A + B)^{-1}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 6 + 6 - 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists (A + B)^{-1}$$

Calculemos $(A + B)^{-1}$,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 12 & 9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow (A + B)^{-1} = \frac{I}{|A + B|} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{I}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X = 3(A + B)^{-1} = 3 \frac{I}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

PROBLEMA B.2. Se dan los planos $\pi: x + y + z = 1$ y $\sigma: ax + by + z = 0$, donde a y b son dos parámetros reales.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- Los valores de a y b para los que el plano σ pasa por el punto $(1,2,3)$ y, además dicho plano σ es perpendicular al plano π . (3 puntos)
- Los valores de a y b para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto $(0,1,1)$ y la distancia del punto $(1,0,1)$ al plano σ es 1. (3 puntos)
- Los valores de a y b para los que la intersección de los planos π y σ es la recta r para la que el vector $(3,2,-5)$ es un vector director de dicha recta r , (3 puntos)
Y obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r . (1 punto)

Solución:

a) ¿ a, b ? / $(1, 2, 3) \in \sigma$ y $\sigma \perp \pi$.

$$(1, 2, 3) \in \sigma \rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 2 + 3 = 0 \rightarrow a + 2b + 3 = 0$$

$$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\sigma \perp \vec{n}_\pi \rightarrow (a, b, 1) \perp (1, 1, 1) \rightarrow (a, b, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \rightarrow a + b + 1 = 0$$

$$\text{Resolvamos el sistema: } \begin{cases} a + 2b + 3 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Restando } 1^\text{a} - 2^\text{a}, \quad b + 2 = 0; \quad b = -2$$

$$\text{Sustituyendo el valor de } b \text{ en, por ejemplo, la } 2^\text{a} \text{ ecuación: } a + (-2) + 1 = 0; \quad a - 1 = 0; \quad a = 1$$

Solución: $a = 1$ y $b = -2$

b) ¿ a, b ? / $(0, 1, 1) \in \sigma$ y $d((1, 0, 1), \sigma) = 1$

$$(0, 1, 1) \in \sigma \rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 1 + 1 = 0 \rightarrow b + 1 = 0 \rightarrow b = -1$$

$$d((1,0,1), \sigma) = 1 \rightarrow \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 1 \rightarrow \frac{|a + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = 1$$

$$\text{como } b = -1 \rightarrow \frac{|a + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2 + 1}} = 1 \rightarrow \frac{|a + 1|}{\sqrt{a^2 + 2}} = 1 \rightarrow |a + 1| = \sqrt{a^2 + 2} \quad \begin{cases} a + 1 = \sqrt{a^2 + 2} \\ a + 1 = -\sqrt{a^2 + 2} \end{cases}$$

1ª ecuación,

$$a + 1 = \sqrt{a^2 + 2} \rightarrow (a + 1)^2 = (\sqrt{a^2 + 2})^2 \rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Comprobación, } \frac{1}{2} + 1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}; \quad \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{Sí}$$

2ª ecuación,

$$a + 1 = -\sqrt{a^2 + 2} \rightarrow (a + 1)^2 = (-\sqrt{a^2 + 2})^2 \rightarrow a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 \rightarrow 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Comprobación, } \frac{1}{2} + 1 = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}; \quad \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad \frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{No}$$

Solución: $a = \frac{1}{2}$ y $b = -1$

c) ¿ a, b ? / $\pi \cap \sigma = r$ de forma que $\vec{v}_r = (3, 2, -5)$

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + z = 0 \end{cases}$

Luego,

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = (1-b)\vec{i} - (1-a)\vec{j} + (b-a)\vec{k} = (1-b)\vec{i} + (a-1)\vec{j} + (b-a)\vec{k} = (1-b, a-1, b-a)$$

Como los vectores $(3, 2, -5)$ y $(1-b, a-1, b-a)$ deben ser directores de la recta r , serán proporcionales. Es decir:

$$\frac{1-b}{3} = \frac{a-1}{2} = \frac{b-a}{-5} = k \neq 0 \rightarrow \begin{cases} 1-b=3k \\ a-1=2k \\ b-a=-5k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=1-3k \\ a=1+2k \\ b-a=-5k \end{cases}$$

La tercera ecuación se obtiene de las dos primeras:

$$b-a = (1-3k) - (1+2k) = 1-3k-1-2k = -5k$$

El sistema queda reducido a: $\begin{cases} b=1-3k \\ a=1+2k \end{cases} \quad k \neq 0$

Una solución la obtendremos, por ejemplo, para $k=1$: $\begin{cases} b=1-3 \cdot 1 = -2 \\ a=1+2 \cdot 1 = 3 \end{cases}$

Un punto de la recta r lo obtendremos a partir del sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Para, por ejemplo, $x=0 \rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases} \rightarrow E_1 - E_2 \rightarrow 3y=1 \rightarrow y=\frac{1}{3}$

Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación:

$$\frac{1}{3} + z = 1 \rightarrow z = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Solución: $a=3$ y $b=-2$ y $P_r = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Nota: este apartado no queda determinado, tiene infinitas soluciones; depende del valor que le demos a k . La recta r no está determinada ya que sólo conocemos su vector director.

PROBLEMA B.3. La diferencia de potencial x entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad y , que está relacionada con la diferencia de potencial x por la ecuación $y = -x^2 - x + 6$, siendo $0 \leq x \leq 2$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$ (3 puntos)
y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad y cuando la diferencia de potencial x es 0 y el valor de la diferencia de potencial x al que corresponde una intensidad y igual a 0, siendo $0 \leq x \leq 2$. (1 punto)
- El valor de la diferencia de potencial x para el que es máximo el producto $y \cdot x$ de la intensidad y por la diferencia de potencial x , cuando $0 \leq x \leq 2$, (2 puntos)
y obtener el valor máximo de dicho producto $y \cdot x$, cuando $0 \leq x \leq 2$, (1 punto)
- El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. (2 puntos)

Solución:

a) Gráfica de $f(x) = -x^2 - x + 6$.

$f(x)$ es una parábola.

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$$

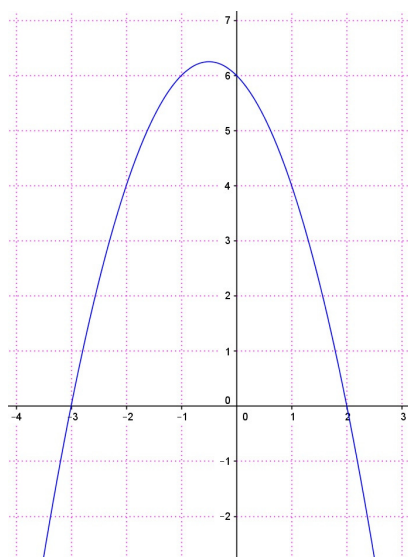
$$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} =$$

$$= \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{1+5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \rightarrow (-3, 0) \\ \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$$\text{Vértice: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4} = 6,25 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

Por tanto la gráfica de $f(x) = -x^2 - x + 6$ es:



Cuando la **diferencia de potencial es 0** ($x = 0$), según cálculos anteriores, la **intensidad es de 6**.

Para una **intensidad 0** ($y = 0$), según cálculos anteriores, la **diferencia de potencial** ($x / 0 \leq x \leq 2$) es 2.

b) ¿ $x?$ / $y \cdot x$ es máximo ($0 \leq x \leq 2$)

$$P = y \cdot x = (-x^2 - x + 6) \cdot x = -x^3 - x^2 + 6x$$

Busquemos extremos relativos.

$$P' = -3x^2 - 2x + 6$$

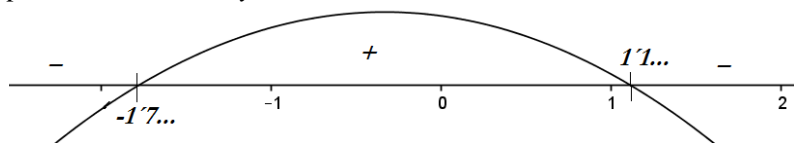
$$-3x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$3x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{19}}{3} \cong 1.1126 \\ \frac{-1 - \sqrt{19}}{3} \cong -1.7863 \end{cases}$$

Signo de P' :

Considerando que P' es, gráficamente, una parábola con coeficiente de x^2 negativo y corta al eje OX para $x = -1.7...$ y $x = 1.1...$,



P es una función que está definida en el intervalo $[0, 2]$.

A la izquierda de $\frac{-1 + \sqrt{19}}{3} \cong 1.1196$ la función es creciente y a la derecha es decreciente, luego para

$x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3}$ la función P alcanza su máximo absoluto.

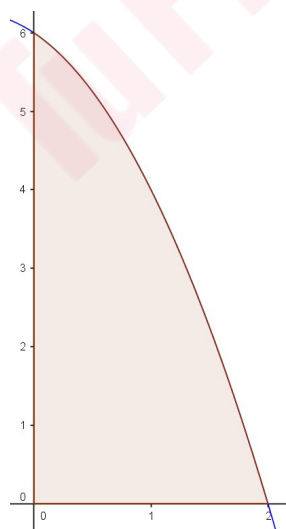
Por tanto, para una diferencia de potencial de $\frac{-1 + \sqrt{19}}{3} \cong 1.1196$ el producto $y \cdot x$ es máximo.

Y para

$$x = \frac{-1 + \sqrt{19}}{3} \rightarrow y \cdot x = P = -\left(\frac{-1 + \sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{-1 + \sqrt{19}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{-1 + \sqrt{19}}{3} = \frac{-56 + 38\sqrt{19}}{27} \cong 4.0607$$

c)

El área pedida es:



La calculamos mediante la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (-x^2 - x + 6) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 \right) - 0 = \\ &= -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 = -\frac{8}{3} - 2 + 12 = -\frac{8}{3} + 10 = \frac{22}{3} u^2 \cong 7.3333 u^2 \end{aligned}$$