

# Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2013 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para ofrecer una propuesta completa.

## Opción A

### Problema 1 · Ecuación matricial

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación  $XAB - XC = 2C$  se puede factorizar por la izquierda:  $X(AB - C) = 2C$ . Calculamos primero cada producto:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad AB - C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  tiene determinante 2, luego es invertible. Al simplificar el factor 2, queda  $XN = C$  y

$$X = CN^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Comprobamos:  $X(AB - C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 2C$ .

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

### Problema 2 · Beneficio de una producción

Si se fabrican y venden  $x$  motocicletas, los ingresos son el precio unitario por la cantidad:

$$I(x) = 8000x.$$

El beneficio es ingresos menos costes. Por tanto,

$$B(x) = I(x) - C(x) = 8000x - (10x^2 + 2000x + 250000) = -10x^2 + 6000x - 250000, \quad x \geq 0.$$

Como  $x$  cuenta motocicletas, consideramos valores enteros no negativos. Para localizar el máximo derivamos la parábola:

$$B'(x) = -20x + 6000 = 0 \implies x = 300.$$

La parábola es cóncava porque el coeficiente de  $x^2$  es negativo; así, este punto crítico es el máximo absoluto. El beneficio máximo es

$$B(300) = -10(300)^2 + 6000(300) - 250000 = 650000.$$

Debe fabricar 300 motocicletas; el beneficio máximo es 650 000 €.

### Problema 3 · Cancelación de contratos

Definimos  $D$  como «cancela el contrato». Las tarifas  $A$ ,  $B$  y  $C$  son alternativas incompatibles y exhaustivas. La probabilidad total de cancelación se obtiene sumando los tres caminos:

$$P(D) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,30 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,01 = 0,031.$$

a) Aplicamos Bayes para hallar la tarifa sabiendo que hubo cancelación:

$$P(C | D) = \frac{P(C)P(D | C)}{P(D)} = \frac{0,25 \cdot 0,01}{0,031} = \frac{5}{62} \approx 0,0806.$$

b) No cancelar es el suceso complementario:  $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,031 = 0,969$ .

c) La probabilidad conjunta de tener tarifa A y cancelar es  $P(A \cap D) = P(A)P(D | A) = 0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$ .

d) No estar en la tarifa B significa estar en A o C. Sumamos esos dos caminos:

$$P(\overline{B} \cap D) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,01 = 0,016.$$

$$P(C | D) = \frac{5}{62}, \quad P(\overline{D}) = 0,969, \quad P(A \cap D) = 0,0135, \quad P(\overline{B} \cap D) = 0,016.$$

## Opción B

### Problema 1 · Optimización lineal

Sean  $x$  los impresos que coloca en coches e  $y$  los que deja en buzones. Los ingresos son  $I = 0,08x + 0,12y$  euros. Las condiciones se traducen en

$$x + y \leq 150, \quad x - 2y \geq 30, \quad y \geq 15, \quad x \geq 0.$$

La región factible tiene como vértices las intersecciones de sus fronteras:

$$y = 15, x = 2y + 30 \Rightarrow (60, 15); \quad y = 15, x + y = 150 \Rightarrow (135, 15);$$

$$x = 2y + 30, x + y = 150 \Rightarrow (110, 40).$$

Evaluamos la función objetivo en esos puntos:

| $(x, y)$    | $(60, 15)$ | $(135, 15)$ | $(110, 40)$ |
|-------------|------------|-------------|-------------|
| $I$ (euros) | 6,60       | 12,60       | 13,60       |

El mayor valor corresponde al tercer vértice.

110 impresos en coches y 40 en buzones; ingreso máximo: 13,60 €.

### Problema 2 · Lectura de una gráfica

No se proporciona una expresión de  $f$ , por lo que usamos únicamente la información del dibujo. La gráfica tiene asíntotas verticales en  $x = -2$ ,  $x = 0$  y  $x = 2$ , y horizontal  $y = 1$ . Así,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}.$$

El único corte con el eje  $X$  es  $(1, 0)$ ; no hay corte con el eje  $Y$ , pues  $x = 0$  está excluido. De los tramos dibujados se deduce que

$$f'(x) > 0 \quad \text{en } (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, 2),$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{en } x = -1 \text{ y } x = 1,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{en } (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty).$$

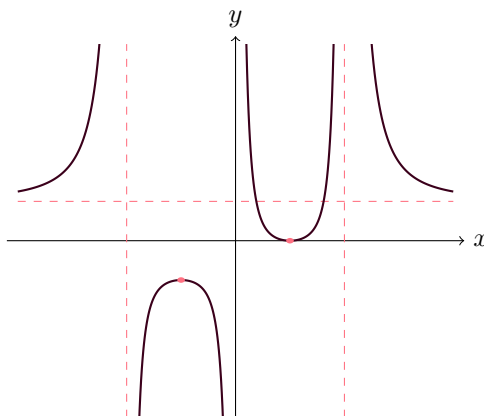
En  $x = -1$  hay un máximo local y en  $x = 1$  un mínimo local. Los puntos excluidos del dominio no son extremos. Los límites solicitados son

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Para el apartado de integral, integramos cada potencia aplicando la regla  $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx &= \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^1 \\ &= \frac{17}{10}. \end{aligned}$$

Esbozo propio coherente con las características indicadas en la gráfica:



Asíntotas:  $x = -2, 0, 2$ ,  $y = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ .

### Problema 3 · Probabilidad de dos deportes

Sean  $A$  y  $B$  los sucesos «practica el deporte A» y «practica el deporte B». De la fórmula de la unión:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,4 - 0,7 = 0,2.$$

- a) La probabilidad de no practicar ninguno es  $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,3$ .  
b) Restamos de quienes practican A los que practican ambos:  $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,3$ .  
c) Usamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}.$$

- d) Dos sucesos son independientes si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . En este caso,  $0,2 = 0,5 \cdot 0,4$ , así que sí son independientes.

|                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $P(\text{ninguno}) = 0,3, \quad P(A \cap \overline{B}) = 0,3, \quad P(A   B) = \frac{1}{2}; \quad A \text{ y } B \text{ son independientes.}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|