Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2016--2017 · Convocatoria ordinaria · Enunciado v3

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

Sean x los litros diarios de leche entera e y los de leche desnatada. El beneficio que queremos maximizar es

$$B(x,y) = 0{,}4x + 0{,}1y.$$

Las condiciones del enunciado se traducen en $x \le 2y$, $x + y \le 3000$, $x \le 1200$ y $x, y \ge 0$. El recinto factible tiene vértices $(0,0)$, $(0,3000)$, $(1200,1800)$ y $(1200,600)$. Los puntos proceden de cortar las rectas frontera: $x = 0$ con $x + y = 3000$; $x = 1200$ con $x + y = 3000$; $x = 1200$ con $x = 2y$; y el origen. Evaluamos el beneficio en cada vértice:

(x,y)	$(0,0)$	$(0,3000)$	$(1200,1800)$	$(1200,600)$
$B(x,y)$	0	300	660	540

El máximo es 660 € y se alcanza cuando se envasan 1200 litros de leche entera y 1800 de desnatada.

$$\boxed{(x,y) = (1200,1800); \qquad B_{\max} = 660 \text{ € diarios.}}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y estudio gráfico

El dominio temporal es $[0,+\infty)$ y la función es

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t \le 2, \\ \dfrac{4}{t-1}, & t > 2. \end{cases}$$

Cada rama es continua en su intervalo. En el punto de unión,

$$f(2) = 4, \qquad \lim_{t\to 2^-} f(t) = 4, \qquad \lim_{t\to 2^+} f(t) = \frac{4}{2-1} = 4,$$

por lo que f es continua en todo su dominio. Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales:

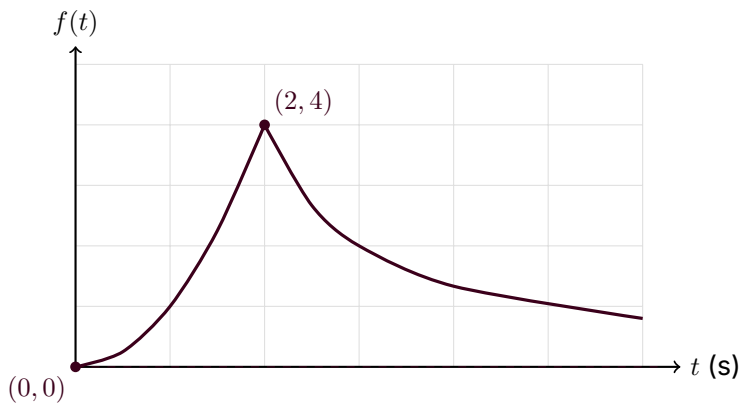
$$f'_-(2) = 2\cdot 2 = 4, \qquad f'_+(2) = -\frac{4}{(t-1)^2}\bigg|_{t=2} = -4.$$

No coinciden, así que la función no es derivable en $t = 2$. En el extremo $t = 0$ existe derivada por la derecha, $f'_+(0) = 0$.

En $0 < t < 2$, $f'(t) = 2t > 0$, así que la función crece. Para $t > 2$, $f'(t) = -4/(t-1)^2 < 0$, de modo que decrece. El valor máximo se alcanza en el vértice de unión, $f(2) = 4$ décimas de milímetro, es decir, $0{,}4$ mm. Además,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{4}{t-1} = 0,$$

por lo que tiene asíntota horizontal $y = 0$. No hay asíntota vertical: el posible cero del denominador, $t = 1$, queda fuera del tramo en que se usa esa expresión, y la primera rama está definida allí.



Crece en $[0,2]$, decrece en $[2,+\infty)$, $f_{\text{max}} = 4$ décimas de mm en $t = 2$.

Ejercicio 3 · Combinaciones sin reemplazo

Hay $8 + 14 = 22$ personas y se eligen dos sin reemplazamiento. El número total de comisiones posibles es $\binom{22}{2} = 231$. Para cada apartado dividimos los casos favorables entre ese total. **a)** Si ambas son profesoras, hay $\binom{14}{2} = 91$ elecciones:

$$P(\text{dos profesoras}) = \frac{\binom{14}{2}}{\binom{22}{2}} = \frac{91}{231} = \frac{13}{33}.$$

b) Para formar una comisión mixta elegimos una de cada grupo, lo que da $14 \cdot 8 = 112$ posibilidades:

$$P(\text{un profesor y una profesora}) = \frac{14 \cdot 8}{231} = \frac{16}{33}.$$

c) Que no haya profesoras significa elegir dos profesores entre ocho:

$$P(\text{ninguna profesora}) = \frac{\binom{8}{2}}{231} = \frac{28}{231} = \frac{4}{33}.$$

$$\boxed{\frac{13}{33};\qquad \frac{16}{33};\qquad \frac{4}{33}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

La proporción muestral es $\widehat{p} = 36/100 = 0{,}36$ y $\widehat{q} = 1 - \widehat{p} = 0{,}64$. Para un intervalo bilateral de confianza de una proporción utilizamos

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}.$$

Con confianza del 96%, $\alpha = 0{,}04$ y $z_{0{,}98} \approx 2{,}054$. **a)** El error máximo es

$$E = 2{,}054\sqrt{\frac{0{,}36 \cdot 0{,}64}{100}} = 2{,}054 \cdot 0{,}048 \approx 0{,}098592.$$

Así, el intervalo para la proporción poblacional es

$$IC_{96\%}(p) = 0{,}36 \pm 0{,}098592 \approx [0{,}261408,\ 0{,}458592].$$

b) Para que el error sea estrictamente menor que $0{,}03$, despejamos n en la condición $z_{0{,}98}\sqrt{\widehat{p}\widehat{q}/n} < 0{,}03$:

$$n > \frac{2{,}054^2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}64}{0{,}03^2} \approx 1080{,}04.$$

El primer entero mayor que ese valor es 1081.

$$\boxed{IC_{96\%}(p) \approx [0{,}2614, 0{,}4586]; \qquad n_{\text{min}} = 1081.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Dimensiones y ecuación matricial

Las matrices tienen dimensiones

$$A \in M_{2\times 3}, \qquad B \in M_{3\times 2}, \qquad C \in M_{2\times 2}.$$

Una suma solo está definida entre matrices del mismo tamaño, y un producto MN requiere que el número de columnas de M coincida con el de filas de N. **a)** AB^t no existe, pues sería $(2\times 3)(2\times 3)$; $B+3C$ tampoco, ya que suma dimensiones 3×2 y 2×2; en cambio, CB^t sí existe y es de tamaño 2×3, y $AB+C$ también existe, pues AB es 2×2.

b) Calculamos primero el producto AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $3-2=1\neq 0$, así que podemos despejar X en $ABX=C$:

$$X = (AB)^{-1}C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Posibles: } CB^t,\ AB+C; \qquad X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad y derivabilidad por tramos

La primera expresión tiene denominador $x-4$, que no se anula para $x\leq 0$; por tanto, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Cada rama es continua y derivable en el interior de su tramo. Revisamos los puntos de cambio $x=0$ y $x=2$.

$$f(0) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}, \qquad \lim_{x\to 0^+}(x+3) = 3.$$

Los límites laterales no coinciden; en $x=0$ hay una discontinuidad de salto finito y la función no es derivable. En $x=2$,

$$\lim_{x\to 2^-}(x+3) = 5, \qquad f(2) = 2^2+1 = 5,$$

por lo que es continua en 2. Para estudiar la derivabilidad comparamos las pendientes laterales:

$$f'_-(2) = 1, \qquad f'_+(2) = 2\cdot 2 = 4.$$

No coinciden, así que f no es derivable en 2. En el resto de su dominio sí lo es.

$$\boxed{\text{Salto en } x=0; \quad \text{continua pero no derivable en } x=2.}$$

Ejercicio 3 · Sucesos compuestos y probabilidad condicionada

Sean T y P los sucesos «aprobar el teórico» y «aprobar el práctico». Las cuatro posibilidades son incompatibles. Se conocen $P(T\cap P)=0{,}50$, $P(T^c\cap P^c)=0{,}06$ y $P(T\cap P^c)=0{,}20$; el caso restante tiene probabilidad

$$P(T^c\cap P) = 1-0{,}50-0{,}06-0{,}20 = 0{,}24.$$

a) Aprobar al menos uno es el complementario de suspender ambos:

$$P(T\cup P) = 1-P(T^c\cap P^c) = 1-0{,}06 = 0{,}94.$$

b) Si se sabe que aprobó el teórico, los casos posibles son aprobar o suspender el práctico dentro de T. La probabilidad condicionada es

$$P(P^c \mid T) = \frac{P(T\cap P^c)}{P(T)} = \frac{0{,}20}{0{,}50+0{,}20} = \frac{2}{7} \approx 0{,}2857.$$

$$\boxed{P(T\cup P) = 0{,}94; \qquad P(P^c\mid T) = \frac{2}{7}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para la media

Como la población es normal y se conoce $\sigma = 0{,}3$ g, para una muestra de tamaño $n = 9$ el intervalo bilateral es

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Con confianza del 98%, $z_{0{,}99} \approx 2{,}326$. La semiamplitud es

$$E = 2{,}326\frac{0{,}3}{\sqrt{9}} = 0{,}2326 \text{ g},$$

y la amplitud total, el doble, es $2E = 0{,}4652$ g.
Para los nueve datos, la media muestral vale

$$\bar{x} = \frac{10 + 9{,}9 + 10{,}04 + 9{,}5 + 10{,}1 + 9{,}8 + 10{,}2 + 10 + 10{,}3}{9} = \frac{89{,}84}{9} \approx 9{,}9822 \text{ g}.$$

Así, el intervalo pedido es

$$IC_{98\%}(\mu) = 9{,}9822 \pm 0{,}2326 \approx [9{,}7496,\ 10{,}2148] \text{ g}.$$

Amplitud $= 0{,}4652$ g; $\qquad IC_{98\%}(\mu) \approx [9{,}7496, 10{,}2148]$ g.

tuProfealRescate