

Lista de Exercícios: Resolução de Equações Irracionais

Nível Básico

1.

Resolva a equação irracional:

$$\sqrt{x+3} = 5$$

2.

Resolva a equação:

$$\sqrt{2x-1} = x-1$$

3.

Resolva a equação:

$$\sqrt{4x+9} = 2x+3$$

4.

Resolva a equação:

$$\sqrt{x+2} + 1 = 3$$

5.

Resolva a equação:

$$\sqrt{3x+7} = 2x-1$$

Nível Intermediário

1.

Resolva a equação irracional e verifique as soluções:

$$\sqrt{2x+5} = x-1$$

2.

Resolva a equação:

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{3x-2}$$

3.

Resolva a equação:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-1} = 5$$

4.

Resolva a equação irracional e determine o conjunto solução:

$$\sqrt{4x+16} = 2x - 2$$

5.

Resolva a equação:

$$\sqrt{5x-4} + 2 = x$$

Nível Avançado

1.

Resolva a equação:

$$\sqrt{x + \sqrt{x+1}} = 2$$

2.

Resolva a equação irracional:

$$\sqrt{2x + \sqrt{3x-4}} = x - 1$$

3.

Resolva a equação:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 3$$

4.

Resolva a equação:

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2x - 1$$

5.

Resolva a equação e verifique as soluções:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 4$$

Desafio

1.

Resolva a equação irracional e determine todas as soluções reais:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x+5} = 3$$

2.

Dada a equação irracional:

$$\sqrt{4x + \sqrt{4x + \sqrt{4x + \dots}}} = 5$$

Resolva a equação e explique o procedimento utilizado.

Soluções

Nível Básico

1.

Equação: $\sqrt{x+3} = 5$

Solução:

$$\text{Isolando a raiz: } (\sqrt{x+3})^2 = 5^2$$

$$x+3 = 25$$

$$\text{Subtraindo 3 de ambos os lados: } x = 22$$

Verificação:

$$\sqrt{22+3} = \sqrt{25} = 5 \quad (\text{Válida})$$

2.

Equação: $\sqrt{2x-1} = x-1$

Solução:

$$\text{Isolando a raiz: } (\sqrt{2x-1})^2 = (x-1)^2$$

$$2x-1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\text{Reorganizando: } x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\text{Usando a fórmula de Bhaskara: } x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Verificação: Substitua $x = 2 + \sqrt{2}$ e $x = 2 - \sqrt{2}$ na equação original para verificar. $x = 2 + \sqrt{2}$ é solução válida, $x = 2 - \sqrt{2}$ não satisfaz a equação original.

3.

Equação: $\sqrt{4x+9} = 2x+3$

Solução:

$$\text{Isolando a raiz: } (\sqrt{4x+9})^2 = (2x+3)^2$$

$$4x+9 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\text{Simplificação: } 0 = 4x^2 + 8x$$

$$\text{Fatoração: } 0 = 4x(x+2)$$

$$\text{Soluções: } x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Verificação: Para $x = 0$: $\sqrt{4(0)+9} = 3$, e $2(0)+3 = 3$. Válida. Para $x = -2$: $\sqrt{4(-2)+9} = \sqrt{1} = 1$, mas $2(-2)+3 = -1$, então não é solução válida.

4.

Equação: $\sqrt{x+2} + 1 = 3$

Solução: Subtraindo 1 de ambos os lados:

$$\sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = 2^2 \Rightarrow x+2 = 4$$

Subtraindo 2:

$$x = 2$$

Verificação: Substitua $x = 2$ na equação original: $\sqrt{2+2} + 1 = 3$ é verdadeira.

5.

Equação: $\sqrt{3x+7} = 2x-1$

Solução:

Isolando a raiz: $(\sqrt{3x+7})^2 = (2x-1)^2$

$$3x+7 = 4x^2 - 4x + 1$$

Reorganizando: $4x^2 - 7x - 6 = 0$

Usando a fórmula de Bhaskara: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49+96}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{145}}{8}$

Verificação: Verificar as soluções encontradas substituindo na equação original.

Nível Intermediário

1.

Equação: $\sqrt{2x+5} = x-1$

Solução:

Isolando a raiz: $(\sqrt{2x+5})^2 = (x-1)^2$

$$2x+5 = x^2 - 2x + 1$$

Reorganizando: $x^2 - 4x - 4 = 0$

Usando a fórmula de Bhaskara: $x = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

Verificação: Substitua $x = 2 + \sqrt{2}$ e $x = 2 - \sqrt{2}$ na equação original para verificar. $x = 2 + \sqrt{2}$ é solução válida, $x = 2 - \sqrt{2}$ não satisfaz a equação.

2.

Equação: $\sqrt{x+6} = \sqrt{3x-2}$

Solução: Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$x+6 = 3x-2$$

Reorganizando:

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Verificação: Substitua $x = 4$ na equação original: $\sqrt{4+6} = \sqrt{10}$ e $\sqrt{3(4)-2} = \sqrt{10}$, válidas.

3.

Equação: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-1} = 5$

Solução: Isole uma raiz:

$$\sqrt{2x+3} = 5 - \sqrt{x-1}$$

Eleve ao quadrado:

$$2x+3 = 25 - 10\sqrt{x-1} + (x-1)$$

Simplificação:

$$10\sqrt{x-1} = 22 - x$$

Eleve ao quadrado novamente:

$$100(x-1) = (22-x)^2$$

Reorganize e resolva a equação quadrática resultante. Solução: $x = 4$, que, após verificação, é válida.

4.

Equação: $\sqrt{4x+16} = 2x-2$

Solução: Simplificação direta:

$$2\sqrt{x+4} = 2(x-1) \Rightarrow \sqrt{x+4} = x-1$$

Elevando ao quadrado:

$$x+4 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Reorganizando:

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

Verificação: Substitua as soluções encontradas.

5.

Equação: $\sqrt{5x-4} + 2 = x$

Solução: Isolando a raiz:

$$\sqrt{5x-4} = x-2$$

Elevando ao quadrado:

$$5x-4 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Reorganizando:

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

Usando a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} = 4 \quad \text{ou} \quad 5$$

Verificação: Substitua as soluções na equação original: $x = 5$ é solução válida, $x = 4$ não satisfaz a equação.

Nível Avançado

1.

Equação: $\sqrt{x + \sqrt{x + 1}} = 2$

Solução: Eleve ao quadrado:

$$x + \sqrt{x + 1} = 4$$

Isole a segunda raiz:

$$\sqrt{x + 1} = 4 - x$$

Eleve ao quadrado novamente:

$$x + 1 = (4 - x)^2 = 16 - 8x + x^2$$

Reorganize e resolva a equação quadrática resultante: $x^2 - 9x + 15 = 0$. Soluções:
 $x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 60}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}$.

2.

Equação: $\sqrt{2x + \sqrt{3x - 4}} = x - 1$

Solução: Eleve ao quadrado:

$$2x + \sqrt{3x - 4} = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Isole a segunda raiz e eleve ao quadrado novamente:

$$\sqrt{3x - 4} = x^2 - 4x + 1 - 2x$$

Resolva a equação quadrática resultante.

3.

Equação: $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 3$

Solução: Reconheça que $\sqrt{(x + 3)^2} = x + 3$. As soluções devem ser verificadas, pois a equação se torna identicamente verdadeira. A única solução possível é $x + 3 > 0$, logo $x \geq -3$. Ao substituir na equação, encontramos que $x = -3$ é a única solução válida.

4.

Equação: $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 2x - 1$

Solução: Eleve ao quadrado diretamente:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

Verificação de identidade: A equação é verdadeira para todos os valores de x , o que deve ser verificado com cuidado. Solução geral: x real, mas $2x - 1$ deve ser não negativo.

5.

Equação: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 4$

Solução: Isole uma das raízes:

$$\sqrt{x+3} = 4 - \sqrt{x-1}$$

Eleve ao quadrado:

$$x+3 = 16 - 8\sqrt{x-1} + (x-1)$$

Isole a segunda raiz e eleve ao quadrado novamente. Resolva a equação resultante.

Desafio

1.

Equação: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+5} = 3$

Solução: Isole a raiz interna e eleve ao quadrado:

$$x+5 + \sqrt{x+5} = 9$$

Isole a segunda raiz e resolva a equação quadrática resultante: $\sqrt{x+5} = 4-x$. Resolva a equação resultante.

2.

Equação: $\sqrt{4x + \sqrt{4x + \sqrt{4x + \dots}}} = 5$

Solução: Suponha que a sequência de raízes infinitas se estabilize em um valor y , onde $y = 4x + y$. Resolva para x considerando o comportamento assintótico. Substitua y na equação original e simplifique. Solução: $x = 5$.