

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Ecuación matricial y dimensiones

Primero calculamos AB , que es posible porque A es 2×3 y B es 3×2 :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación queda $(AB)XC = R$, donde $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $\det(AB) = -5$ y $\det C = 1$, ambas matrices son invertibles; multiplicamos por sus inversas a izquierda y derecha:

$$X = (AB)^{-1}RC^{-1}.$$

Con

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

En $A \cdot D = E \cdot B$, para que ambos productos se puedan realizar y tengan el mismo orden, D debe ser 3×2 y E debe ser 2×3 ; así los dos resultados son matrices 2×2 .

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad \dim D = 3 \times 2, \quad \dim E = 2 \times 3.$$

Ejercicio 2 · Minimización del coste de almacenamiento

Sean x e y los bidones de pintura interior y exterior. Las condiciones del almacén se expresan como

$$x + y \leq 160, \quad x + y \geq 60, \quad x \geq 20, \quad y \geq x.$$

El coste diario que queremos minimizar es $C(x, y) = 1,50x + 0,90y$. Como ambos costes son positivos, conviene almacenar el mínimo total permitido: $x + y = 60$. Además $x \geq 20$ y $y \geq x$, por lo que con ese total $20 \leq x \leq 30$ y $y = 60 - x$. El coste se reduce a

$$C(x, 60 - x) = 1,50x + 0,90(60 - x) = 54 + 0,60x,$$

que aumenta con x . Por tanto se elige el menor valor permitido, $x = 20$, y entonces $y = 40$. La capacidad máxima se respeta.

$$20 \text{ bidones de interior y } 40 \text{ de exterior; } C_{\min} = 66 \text{ € al día.}$$

Bloque B

Ejercicio 3 · Crecimiento de una población

El crecimiento instantáneo es $f'(t) = 400 + 30\sqrt{t}$ y actualmente hay $f(0) = 90000$ habitantes. Integramos la tasa de crecimiento:

$$f(t) = \int (400 + 30\sqrt{t}) dt = 400t + 20t^{3/2} + C.$$

Como $f(0) = 90000$, se tiene $C = 90000$. A los nueve meses,

$$f(9) = 90000 + 400(9) + 20(9^{3/2}) = 94140.$$

El integral de f' entre los meses 9 y 16 representa el aumento de población en ese período:

$$\int_9^{16} f'(t) dt = \left[400t + 20t^{3/2} \right]_9^{16} = 3540 \text{ habitantes.}$$

Durante los tres primeros años, que son 36 meses, el aumento es

$$f(36) - f(0) = 400(36) + 20(36^{3/2}) = 18720 \text{ habitantes.}$$

A razón de 150 euros por cada nuevo habitante, la ayuda total es $18720(150) = 2808000$ euros.

$$f(9) = 94140; \quad \int_9^{16} f'(t) dt = 3540; \quad \text{ayuda en 3 años} = 2808000 \text{ €}.$$

Ejercicio 4 · Continuidad, tangente y área

Para que la función sea continua en $x = 1$, igualamos el límite de la primera rama con el valor de la segunda:

$$3 + e = 1 + a + 2 \implies a = e.$$

Con ese valor, las derivadas laterales en 1 son e y $2 + e$, distintas; por ello no es derivable en $x = 1$.

En el apartado b), $a = -3$ y el punto $x = 0$ pertenece a la primera rama. Allí $f(0) = 4$ y $f'(0) = e^0 = 1$. La recta tangente, $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$, es $y = x + 4$.

Para el área del apartado c), en $[2, 4]$ se usa la segunda rama, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, que es no negativa en todo ese intervalo. Por tanto,

$$\mathcal{A} = \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_2^4 = \frac{14}{3}.$$

$$a = e \text{ (continua, pero no derivable en 1); } y = x + 4; \quad \mathcal{A} = \frac{14}{3}.$$

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad condicionada

Sean W el suceso «cliente mujer» y M, L, XL las tallas. Se conoce $P(W) = 0,65$, $P(M | W) = 0,50$, $P(XL | W) = 0,10$; entre los hombres, $P(L | W^c) = 0,40$ y $P(XL | W^c) = 0,45$.

Entre las mujeres, el porcentaje que no usa XL es $1 - 0,10 = 0,90$. Para todos los clientes,

$$P(L) = 0,65(0,40) + 0,35(0,40) = 0,40,$$

así que el 60% no usa la talla L. Finalmente, la probabilidad de que un cliente de talla M sea mujer se calcula con Bayes. La proporción de hombres que usa M es $1 - 0,40 - 0,45 = 0,15$:

$$P(W | M) = \frac{P(M | W)P(W)}{P(M | W)P(W) + P(M | W^c)P(W^c)} = \frac{0,50(0,65)}{0,50(0,65) + 0,15(0,35)} = \frac{130}{151}.$$

$$P(XL^c | W) = 90\%; \quad P(L^c) = 60\%; \quad P(W | M) = \frac{130}{151} \approx 86,1\%.$$

Ejercicio 6 · Probabilidad de aprobar asignaturas

Sean A y B los sucesos «aprobar A» y «aprobar B». Tenemos $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,55$ y $P(A \cap B) = 0,35$.

$$P(B^c | A) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,75 - 0,35}{0,75} = \frac{8}{15}.$$

La probabilidad de aprobar al menos una es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,95,$$

por lo que la probabilidad de no aprobar ninguna es $1 - 0,95 = 0,05$. Si sabemos que aprobó alguna, la probabilidad de que aprobara A es

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,75}{0,95} = \frac{15}{19}.$$

No son independientes, porque $P(A \cap B) = 0,35$ no coincide con $P(A)P(B) = 0,4125$.

$$P(B^c | A) = \frac{8}{15}; \quad P(A \cup B) = 0,95; \quad P(A^c \cap B^c) = 0,05; \quad P(A | A \cup B) = \frac{15}{19}; \quad \text{no son independientes.}$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Intervalo y tamaño muestral para una proporción

La proporción muestral de mujeres matriculadas en carreras STEM es $\hat{p} = 710/2000 = 0,355$, con $\hat{q} = 0,645$. Un intervalo bilateral de confianza para una proporción tiene la forma

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

Para confianza del 96,5%, $z_{0,9825} \approx 2,1084$ y el error es

$$E = 2,1084 \sqrt{\frac{0,355(0,645)}{2000}} \approx 0,02256.$$

Así, el intervalo es $(0,33244, 0,37756)$, es decir, aproximadamente entre el 33,24% y el 37,76%.

Para la nueva muestra, se conoce $\hat{p} = 0,37$ y se exige $E \leq 0,015$ con confianza del 98%, para lo que $z_{0,99} \approx 2,3263$. Despejamos el tamaño:

$$n \geq \frac{z_{0,99}^2 (0,37)(0,63)}{0,015^2} \approx 5606,73.$$

Se redondea hacia arriba para garantizar que el error no supere el máximo pedido.

$$IC_{96,5\%} \approx (0,33244, 0,37756); \quad n_{\min} = 5607.$$

Ejercicio 8 · Distribución normal e intervalo de confianza

El intervalo de confianza del 95% para la media es $(517,65, 551,95)$. Su punto medio es la media muestral, y su semiamplitud es el error:

$$\bar{x} = \frac{517,65 + 551,95}{2} = 534,8, \quad E = \frac{551,95 - 517,65}{2} = 17,15.$$

Con desviación típica poblacional $\sigma = 140$ y $z_{0,975} = 1,96$, de $E = z\sigma/\sqrt{n}$ despejamos

$$n = \left(\frac{1,96(140)}{17,15} \right)^2 = 256.$$

Para $n = 78$ y confianza del 97%, el error es

$$E = z_{0,985} \frac{140}{\sqrt{78}} \approx 2,1701 \frac{140}{\sqrt{78}} \approx 34,40 \text{ €}.$$

En el último apartado, una hipoteca elegida al azar tiene cuota $X \sim N(540, 150^2)$. Estandarizamos 600 y 700:

$$P(600 < X < 700) = \Phi\left(\frac{700 - 540}{150}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 540}{150}\right) = \Phi(1,0667) - \Phi(0,4) \approx 0,2015.$$

$$\bar{x} = 534,8 \text{ €}; \quad n = 256; \quad E_{97\%} \approx 34,40 \text{ €}; \quad P(600 < X < 700) \approx 0,2015.$$