Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2013--2014 · Opción 4

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Operaciones con matrices

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Para calcular $A \cdot B^t$, primero trasponemos B y después multiplicamos fila por columna:

$$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad AB^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{AB^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}.}$$

b) De $A + 2X = B$, restamos A y dividimos entre 2:

$$X = \frac{B - A}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

c) Como $\det B = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = 14 \neq 0$, B es invertible. Multiplicamos $BY = (6, 9)^t$ por B^{-1} a la izquierda:

$$B^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad Y = B^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 42 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Derivadas de un producto y un cociente

La función f contiene $\ln(x^4)$, por lo que está definida para $x \neq 0$; el punto -1 pertenece al dominio. Aplicamos la regla del producto y la regla de la cadena:

$$f(x) = (2x^2 - 1)^3 \ln(x^4),$$

$$f'(x) = 12x(2x^2 - 1)^2 \ln(x^4) + (2x^2 - 1)^3 \frac{4}{x}.$$

Al evaluar en $x = -1$, se tiene $2(-1)^2 - 1 = 1$ y $\ln((-1)^4) = \ln 1 = 0$. Por tanto,

$$f'(-1) = 12(-1) \cdot 1^2 \cdot 0 + 1^3 \cdot \frac{4}{-1} = -4.$$

Para $g(x) = e^{-2x+x^2}/(x^2+1)$, el denominador es positivo para todo real, así que g está definida en 0. Usamos la regla del cociente, teniendo en cuenta que la derivada de $e^{u(x)}$ es $u'(x)e^{u(x)}$:

$$g'(x) = \frac{e^{-2x+x^2}\big((2x-2)(x^2+1) - 2x\big)}{(x^2+1)^2}.$$

En $x = 0$, $e^0 = 1$, y resulta

$$g'(0) = \frac{(-2) \cdot 1 - 0}{1^2} = -2.$$

$$\boxed{f'(-1) = -4; \qquad g'(0) = -2.}$$

Ejercicio 3 · Unión e independencia de sucesos

Sean F el suceso «juega al fútbol» y B el suceso «juega al baloncesto». Se conocen $P(F) = 0{,}40$, $P(B) = 0{,}30$ y $P(F \cap B) = 0{,}20$.

a) El suceso «no practica ninguno» es el complementario de $F \cup B$. Aplicamos la fórmula de la unión, restando la intersección para no contar dos veces a quienes practican ambos deportes:

$$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0{,}40 + 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}50,$$

$$P(F^c \cap B^c) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0{,}50 = 0{,}50.$$

b) De quienes juegan al fútbol, los que no juegan al baloncesto tienen probabilidad

$$P(F \cap B^c) = P(F) - P(F \cap B) = 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}20.$$

Por probabilidad condicionada,

$$P(B^c \mid F) = \frac{P(F \cap B^c)}{P(F)} = \frac{0{,}20}{0{,}40} = 0{,}50.$$

c) Para que fueran independientes debería cumplirse $P(F \cap B) = P(F)P(B)$. Sin embargo,

$$P(F)P(B) = 0{,}40 \cdot 0{,}30 = 0{,}12 \neq 0{,}20 = P(F \cap B),$$

así que los sucesos no son independientes.

$$\boxed{P(\text{ninguno}) = 0{,}50; \quad P(B^c \mid F) = 0{,}50; \quad F \text{ y } B \text{ son dependientes.}}$$

Ejercicio 4 · Contraste de una proporción

La afirmación que se quiere comprobar es que al menos el 65% de los habitantes está a favor. Definimos p como la proporción poblacional favorable y contrastamos

$$H_0 : p \geq 0{,}65, \qquad H_1 : p < 0{,}65.$$

La muestra tiene $n = 950$ personas, de las que 590 están a favor, así que

$$\hat{p} = \frac{590}{950} = \frac{59}{95} \approx 0{,}6211.$$

Para el contraste unilateral usamos el valor frontera $p_0 = 0{,}65$. El estadístico es

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0{,}6211 - 0{,}65}{\sqrt{0{,}65 \cdot 0{,}35/950}} \approx -1{,}87.$$

Al nivel de significación del 10%, el valor crítico de cola izquierda es $z_{0{,}10} \approx -1{,}282$. Como $-1{,}87 < -1{,}282$, rechazamos H_0: los datos apoyan que la proporción es inferior al 65%.

Al nivel del 1%, el valor crítico es $z_{0{,}01} \approx -2{,}326$. En este caso $-1{,}87 > -2{,}326$, por lo que no se rechaza H_0. Con ese nivel más exigente, los datos no permiten concluir que la proporción sea inferior al 65%.

$$\boxed{\alpha = 0{,}10: \text{ se rechaza } H_0; \qquad \alpha = 0{,}01: \text{ no se rechaza } H_0.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Ecuación matricial y optimización lineal

a) Calculamos primero la matriz del segundo miembro:

$$C - D^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $AX = 2(C - D^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Si $X = (x_{ij})$, al multiplicar por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene

$$AX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ 2x_{11} & 2x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Igualando componentes, $x_{21} = -2,\ x_{22} = 0,\ x_{11} = 0,\ x_{12} = 3$.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

b) En una función lineal sobre una región poligonal, los extremos se alcanzan en sus vértices. Evaluamos $F(x, y) = 4x - 3y + 8$ en los puntos dados:

Vértice	$A(0,2)$	$B(2,0)$	$C(4,0)$	$D(6,3)$	$E(3,6)$
F	2	16	24	23	2

El máximo es 24, en $C(4,0)$. El mínimo es 2, en A y E; como la función es lineal, también vale 2 en todos los puntos del segmento AE.

$$\boxed{F_{\text{mín}} = 2 \text{ en el segmento } AE; \qquad F_{\text{máx}} = 24 \text{ en } C(4,0).}$$

Ejercicio 2 · Estudio y representación de una función cúbica

La función es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Para estudiar la monotonía y los extremos calculamos la derivada:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x, \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2 \geq 0.$$

La derivada solo se anula en $x = 2$ y no cambia de signo: la función crece en todo $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos. Para la curvatura,

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

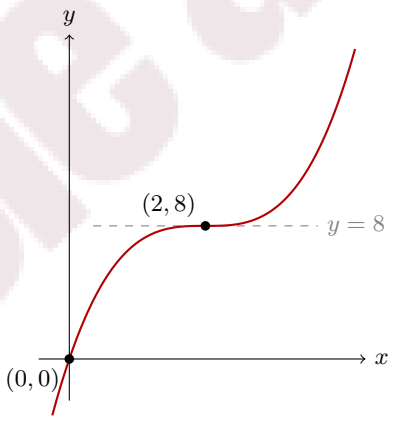
Es cóncava si $x < 2$ y convexa si $x > 2$; el cambio de curvatura da un punto de inflexión en $x = 2$, donde $f(2) = 8$. Además,

$$f(x) = (x-2)^3 + 8,$$

lo que muestra también que la tangente en el punto de inflexión es horizontal. Para cortar el eje X, resolvemos

$$x^3 - 6x^2 + 12x = x\big((x-3)^2 + 3\big) = 0.$$

El segundo factor es siempre positivo, por lo que el único corte con los ejes es $(0,0)$.



$$\boxed{\text{Crece en } \mathbb{R};\ \text{inflexión } (2,8);\ \text{único corte con los ejes } (0,0).}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad de unión y condicionada

Sean E y D los sucesos «lee noticias en papel» y «lee noticias en formato digital». Se conocen $P(E) = 0{,}25$, $P(D) = 0{,}70$ y $P(E \cap D) = 0{,}10$.

a) La probabilidad de que use al menos uno de los dos formatos se calcula con la unión:

$$P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = 0{,}25 + 0{,}70 - 0{,}10 = 0{,}85.$$

b) La probabilidad de que lea en papel sabiendo que lee en digital es

$$P(E \mid D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}10}{0{,}70} = \frac{1}{7} \approx 0{,}1429.$$

c) «Exclusivamente en uno» significa papel sin digital o digital sin papel. Estos dos casos son incompatibles, por lo que sumamos sus probabilidades:

$$P(E \cap D^c) + P(E^c \cap D) = (0{,}25 - 0{,}10) + (0{,}70 - 0{,}10) = 0{,}75.$$

$$\boxed{P(E \cup D) = 0{,}85; \quad P(E \mid D) = \frac{1}{7}; \quad P(\text{lee exclusivamente en un formato}) = 0{,}75.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

El intervalo de confianza del 94% es $(0{,}31, 0{,}39)$. Su centro coincide con la proporción muestral:

$$\hat{p} = \frac{0{,}31 + 0{,}39}{2} = 0{,}35, \qquad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}65.$$

Con una muestra de 500 personas, el número que desea la construcción es

$$500\hat{p} = 500 \cdot 0{,}35 = 175.$$

Para conservar el mismo nivel de confianza, usamos $z_{0{,}97} \approx 1{,}881$. Si el error máximo ha de ser $E = 0{,}03$, la fórmula del tamaño muestral para estimar una proporción da

$$n \geq \frac{z_{0{,}97}^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2} = \frac{1{,}881^2 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65}{0{,}03^2} \approx 894{,}37.$$

Redondeamos al entero superior para garantizar que el error no supere $0{,}03$.

$$\boxed{\hat{p} = 0{,}35; \qquad 175 \text{ personas}; \qquad n_{\text{min}} = 895.}$$

tuProfealRescate