

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $A \cdot A^t - 5 A^{-1}$, siendo A^t y A^{-1} las matrices traspuesta e inversa de A , respectivamente.

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A A^t - 5 A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1(-1) + 2 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & -1(-1) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M_1 y M_2 . Para fabricar 1 tonelada métrica de A hacen falta 500 kg de M_1 y 750 kg de M_2 , mientras que las cantidades de M_1 y M_2 utilizadas para fabricar 1 tonelada de B son 800 kg y 400kg, respectivamente. La empresa tiene contratado un máximo de 10 toneladas de cada materia prima y vende a 1.000 € y 1.500 € cada tonelada de abono de A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son éstos?

Solución:

Utilizamos las incógnitas:

$x = \text{Tm del abono del tipo A}$

$y = \text{Tm del abono del tipo B}$

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Materias primas		Venta
	M_1	M_2	
Abono A	500 Kg	750 Kg	1000 €/Tm
Abono B	800 Kg	400 Kg	1500 €/Tm
restricciones	10000 Kg	10000 Kg	

Los ingresos serían: $1000x + 1500y$

Las restricciones son:

por la disponibilidad de la materia prima M_1 : $500x + 800y \leq 10000$

por la disponibilidad de la materia prima M_2 : $750x + 400y \leq 10000$

la demanda de B nunca llega a triplicar la de A $y < 3x$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 1000x + 1500y$

$$s.a. \begin{cases} 500x + 800y \leq 10000 \\ 750x + 400y \leq 10000 \\ y < 3x \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$$500x + 800y \leq 10000$$

$$750x + 400y \leq 10000$$

$$y < 3x$$

$$(1) \quad 500x + 800y = 10000$$

$$(2) \quad 750x + 400y = 10000$$

$$(3) \quad y = 3x$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 12.5 \\ 20 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 25 \\ 40 & 0 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 0 \\ 5 & 15 \end{array}$$

¿(0,0) cumple?

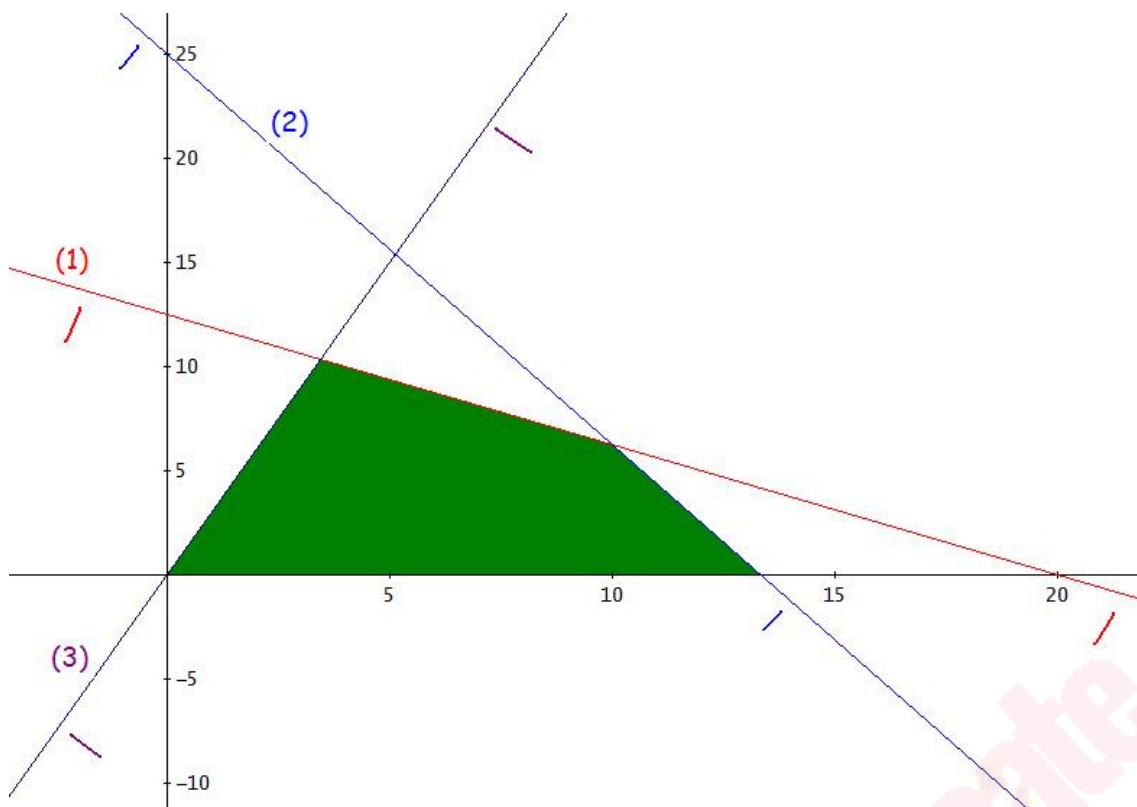
¿(0,0) cumple?

¿(5,0) cumple?

$$500 \cdot 0 + 800 \cdot 0 \leq 10000 \quad \text{sí}$$

$$0.3 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 \leq 90 \quad \text{sí}$$

$$0 < 3 \cdot 5 \quad \text{sí}$$



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} 500x + 800y = 10000 \\ (3) \begin{cases} y = 3x \end{cases} \end{cases} \quad 500x + 800 \cdot 3x = 10000 \rightarrow 500x + 2400x = 10000 \rightarrow 2900x = 10000 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{10000}{2900} = \frac{100}{29} = 3'448 \\ \rightarrow y &= 3 \frac{100}{29} = \frac{300}{29} = 10'344 \rightarrow \left(\frac{100}{29}, \frac{300}{29} \right) \end{aligned}$$

$$(1) \begin{cases} 500x + 800y = 10000 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 750x + 400y = 10000 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I^a: (-2) \begin{cases} -250x - 400y = -5000 \\ 2^a \begin{cases} 750x + 400y = 10000 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

sumando,

$$500x = 5000$$

$$x = 10$$

sustituyendo en I^a ,

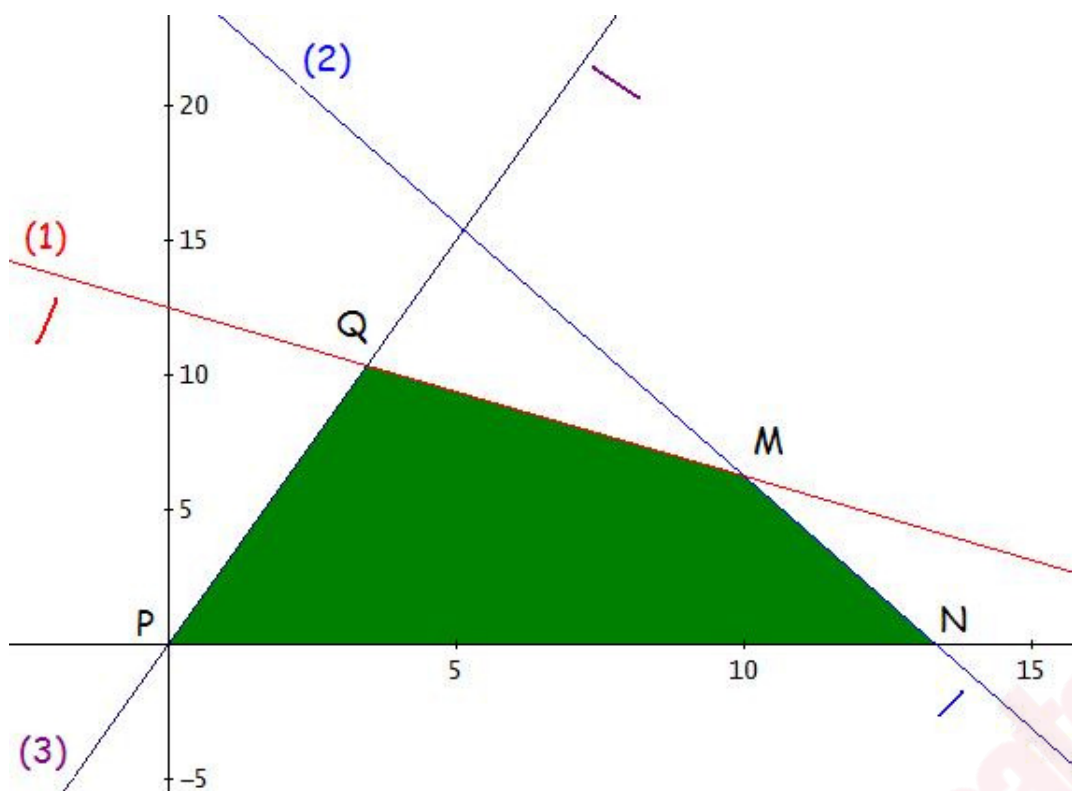
$$500 \cdot 10 + 800y = 10000$$

$$800y = 5000$$

$$y = \frac{5000}{800} = 6'25 \rightarrow (10, 6'25)$$

La región factible está limitada por los puntos

$$M(10, 6'25), N\left(\frac{40}{3}, 0\right), P(0, 0) \text{ y } Q\left(\frac{100}{29}, \frac{300}{29}\right)$$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 1000x + 1500y$
$(0,0)$	$1000 \cdot 0 + 1500 \cdot 0 = 0$
$(\frac{100}{29}, \frac{300}{29})$	$1000 \cdot \frac{100}{29} + 1500 \cdot \frac{300}{29} = 18965'517$
$(10, 6'25)$	$1000 \cdot 10 + 1500 \cdot 6'25 = 19375$ máximo
$(\frac{40}{3}, 0)$	$1000 \cdot \frac{40}{3} + 1500 \cdot 0 = 13333'333$

El máximo se alcanza en el punto $(10, 6'25)$. Por lo que para maximizar sus ingresos la fábrica debe producir 10 Tm del abono tipo A y 6'25 Tm del tipo B.

Con esta producción los ingresos serían de 19375 €.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[-4, 2]$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Continuidad en $[-4, 2]$,

Para $-4 \leq x < -3$, $f(x) = 2$, función constante, luego es continua.

Para $-3 < x < 1$, $f(x) = x^2$, función polinómica, luego continua.

Para $1 < x \leq 2$, $f(x) = 1$, función constante, luego es continua.

Debemos estudiar la continuidad en los cambios de definición.

Para $x = -3$

a) $f(-3) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x^2 = (-3)^2 = 9 \end{cases}$

como los límites laterales son distintos no existe el $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

Luego, $f(x)$ es discontinua en $x = -3$, por existir los dos límites laterales es una discontinuidad de salto finito.

Para $x = 1$

a) $f(1) = 1$

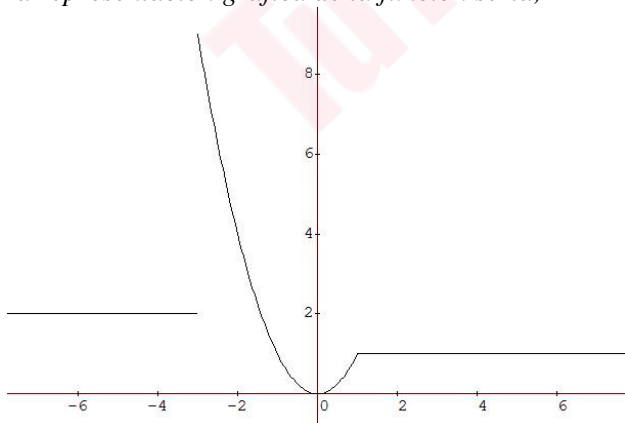
b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 \end{cases} = 1$

c) $f(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

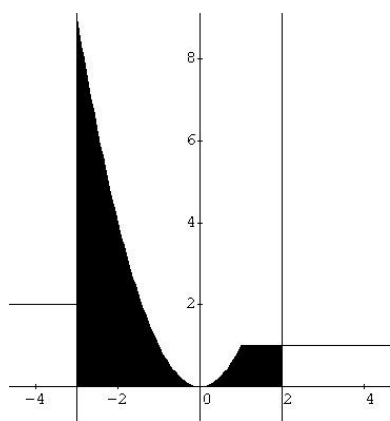
Luego, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

En resumen, $f(x)$ es continua en $[-4, 2] \setminus \{-3\}$ y en $x = -3$ tiene una discontinuidad de salto finito.

b) La representación gráfica de la función sería,



El área a calcular es,



$$A = \int_{-3}^1 x^2 dx + \int_1^2 1 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^1 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{(-3)^3}{3} + 2 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{-27}{3} + 1 = \frac{1}{3} + 9 + 1 = \frac{1}{3} + 10 = \frac{31}{3} \text{ u. a.}$$

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivos en el 96% de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94% de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:

- La probabilidad de que el test dé positivo.
- La probabilidad de que sea portadora del virus, si el resultado del test es positivo.
- La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.

Solución:

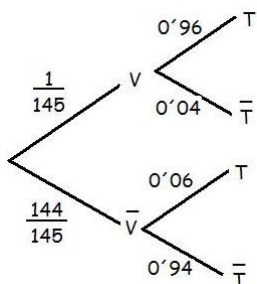
Utilizamos los sucesos, V = la persona porta el virus y T = el test da positivo.

De los datos del problema sabemos que,

$$p(V) = \frac{1}{145} \quad \text{luego} \quad p(\bar{V}) = \frac{144}{145}$$

$$p\left(\frac{T}{V}\right) = 0.96 \quad p\left(\frac{\bar{T}}{\bar{V}}\right) = 0.94$$

Por lo tanto el árbol del problema será,



$$a) \quad p(T) = \frac{1}{145} 0.96 + \frac{144}{145} 0.06 = 0.06620... \approx 0.066$$

$$b) \quad p\left(\frac{V}{T}\right) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{\frac{1}{145} 0.96}{0.066} = 0.1$$

$$c) \quad p(\bar{V} \cap \bar{T}) = \frac{144}{145} 0.94 = 0.93351... \approx 0.934$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 euros, respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1.265.000 euros por la venta de automóviles de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000 euros?

Solución:

Utilizamos como incógnitas,

$x = n^{\circ}$ de coches a 12000€

$y = n^{\circ}$ de coches a 15000€

$z = n^{\circ}$ de coches a 22000€

De las frases del problema obtenemos las ecuaciones,

“ha ingresado 1265000€”, $12000x + 15000y + 22000z = 1265000$

“del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos”, $x = y + z$

“del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000€”, $z = y/3$

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} 12000x + 15000y + 22000z = 1265000 \\ x = y + z \\ z = \frac{y}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x + 15y + 22z = 1265 \\ x - y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 22 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -36 - 22 - 12 - 45 = -115 \neq 0$

el sistema tiene solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1265 & 15 & 22 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265(-3-1)}{-115} = 44$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1265 & 22 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{-1265 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265 \cdot 3}{-115} = 33$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 15 & 1265 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{-115} = \frac{1265(-1)}{-115} = 11$$

Solución: ha vendido 44 coches de 12000€, 33 de 15000€ y 11 de 22000€.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones del sistema determinado por las inecuaciones:

$$3y - 4x - 8 \leq 0, \quad y \geq -4x + 4, \quad y \geq 2, \quad x \leq 1$$

b) Halla los vértices de la región anterior.

c) Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función $f(x,y) = 3x - y$ en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

Solución:

a)

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$$3y - 4x \leq 8$$

$$y \geq -4x + 4$$

$$y \geq 2$$

$$x \leq 1$$

(1) $3y - 4x = 8$

(2) $y = -4x + 4$

(3) $y = 2$

(4) $x = 1$

x	y
0	$\frac{8}{3}$
-2	0

x	y
0	4
1	0

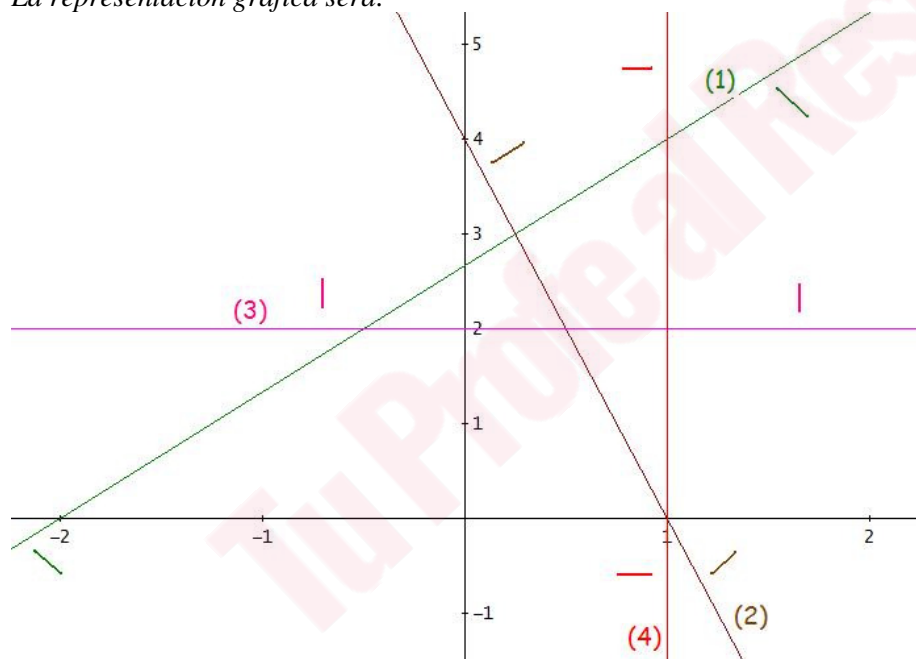
¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

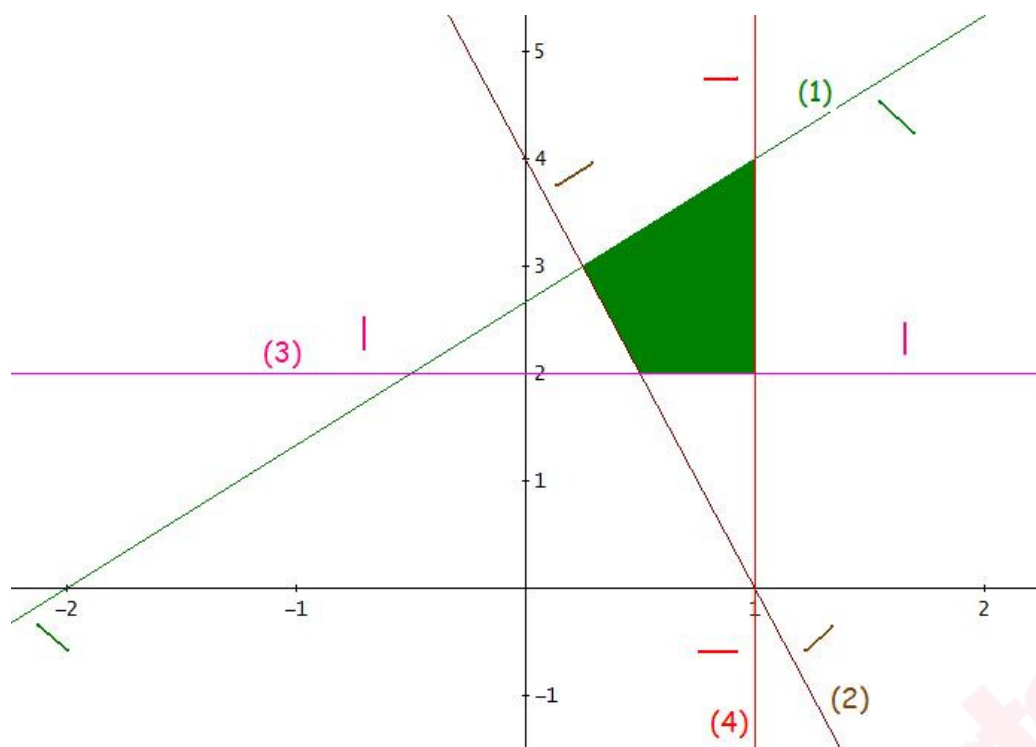
$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \leq 8 \quad \text{Sí}$$

$$0 \geq -4 \cdot 0 + 4 \quad \text{No}$$

La representación gráfica será:



El conjunto de soluciones será la región coloreada,



b) Para encontrar los vértices de la región debemos resolver los siguientes sistemas,

De (1) y (2): $A\left(\frac{1}{4}, 3\right)$

$$\begin{cases} 3y - 4x = 8 \\ y = -4x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 4x = 8 \\ y + 4x = 4 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $4y = 12; y = 3$

sustituyendo en la 1ª, $3 \cdot 3 - 4x = 8; 9 - 4x = 8; 9 - 8 = 4x; 1 = 4x; x = \frac{1}{4}$

De (1) y (4): $B(1, 4)$

$$\begin{cases} 3y - 4x = 8 \\ x = 1 \end{cases}$$

$3y - 4 \cdot 1 = 8; 3y - 4 = 8; 3y = 12; y = 4$

De (3) y (4): $C(1, 2)$

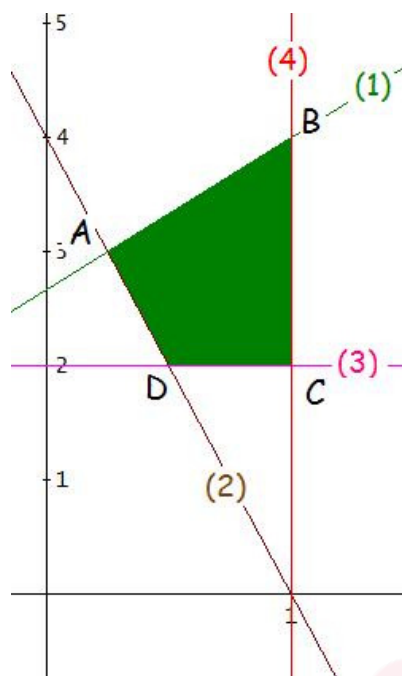
$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

De (2) y (3): $D\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$$\begin{cases} y = -4x + 4 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow 2 = -4x + 4 \rightarrow 4x = 4 - 2 \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Los vértices de la región anterior son los puntos:

$$A\left(\frac{1}{4}, 3\right), B(1, 4), C(1, 2) \text{ y } D\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$



c)

Sabemos que la función dada alcanzará su mínimo en alguno de los extremos de la región. Calculémoslo,

x, y	$f(x, y) = 3x - y$
$\frac{1}{4}, 3$	$3 \cdot \frac{1}{4} - 3 = \frac{3}{4} - 3 = \frac{3-12}{4} = \frac{-9}{4} = -2.25$ <i>mínimo</i>
$1, 4$	$3 \cdot 1 - 4 = -1$
$1, 2$	$3 \cdot 1 - 2 = 1$
$\frac{1}{2}, 2$	$3 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$

La función $f(x, y)$ alcanza su mínimo en el punto

$$A\left(\frac{1}{4}, 3\right)$$

con un valor de -2.25

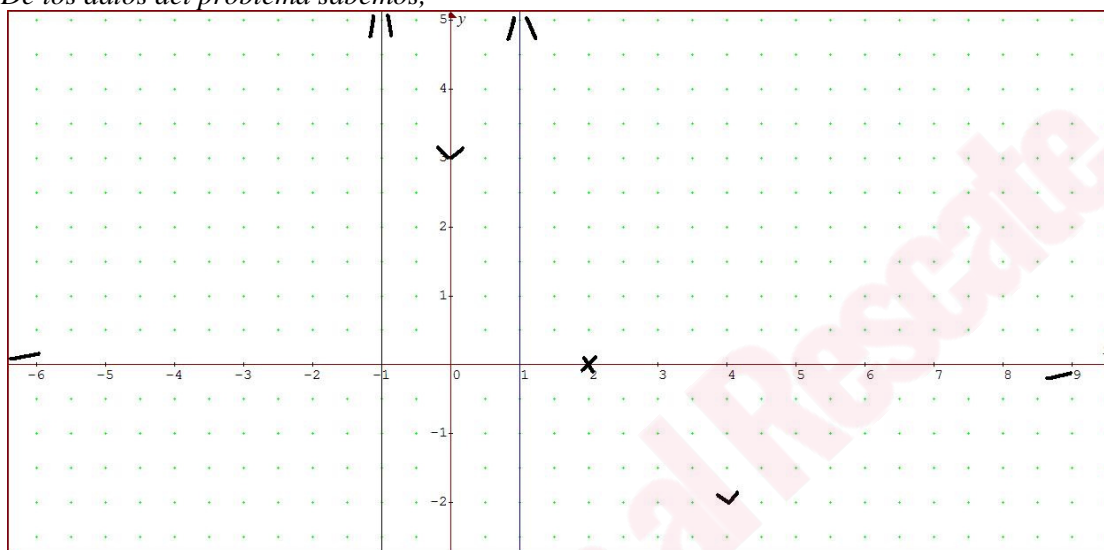
EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

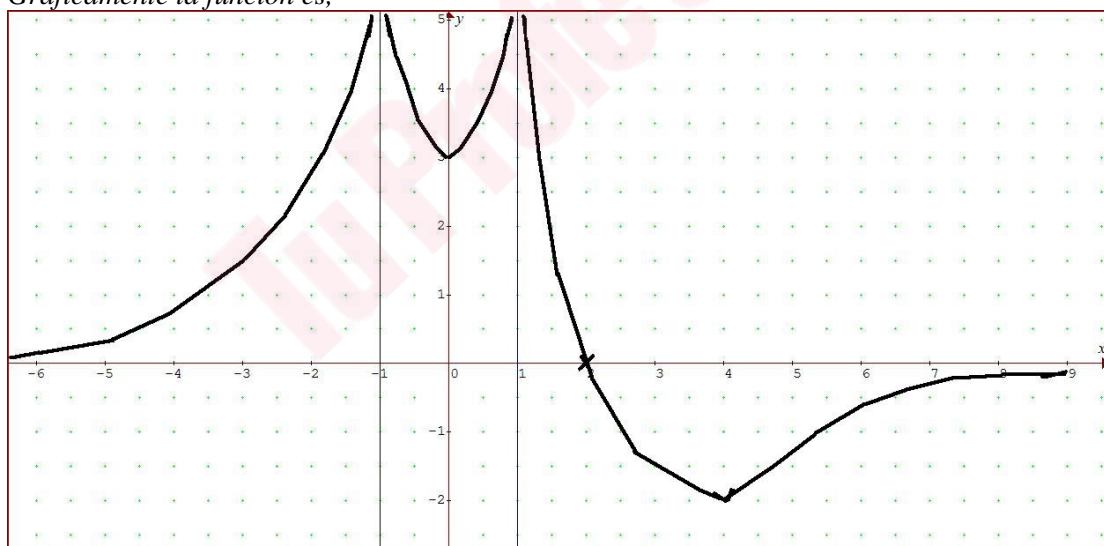
- Su dominio es la recta real salvo los puntos -1 y 1 . Es continua en todo su dominio y corta al eje OX en el punto $(2, 0)$.
 - Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2$.
 - Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty$.
 - Tiene una asíntota vertical en $x = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -1^-} = +\infty$.
 - Tiene un mínimo en $(4, -2)$ y otro en $(0, 3)$. No tiene máximos.
- a) Representa gráficamente dicha función.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) De los datos del problema sabemos,



Gráficamente la función es,



b) La función es

creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$

decreciente en $(-1, 0) \cup (1, 4)$

EJERCICIO B

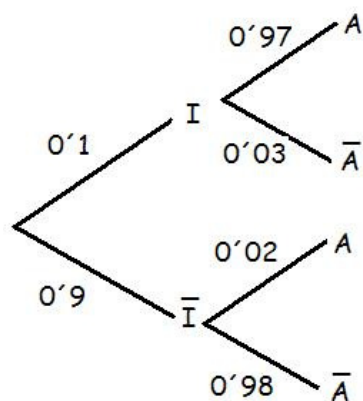
PROBLEMA 4. La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0'1. La probabilidad de que suene ésta si se ha producido algún incidente es 0'97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0'02.

- Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.
- En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Solución:

Utilizamos los sucesos: I = hay incidente y A = suena la alarma

El árbol del problema será,



- a) Probabilidad de que no suene la alarma

$$p(\bar{A}) = 0'1 \cdot 0'03 + 0'9 \cdot 0'98 = 0'885$$

- b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

$$p\left(\frac{\bar{I}}{A}\right) = \frac{p(\bar{I} \cap A)}{p(A)} = \frac{0'9 \cdot 0'02}{0'1 \cdot 0'97 + 0'9 \cdot 0'02} = \frac{0'018}{0'115} = 0'15652... \approx 0'157$$