

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Distancia de puntos de una recta a un plano

La recta tiene como punto $P_0 = (3, 5, -1)$ y vector director $(1, 1, -1)$, por lo que la escribimos paramétricamente como

$$r : (x, y, z) = (3, 5, -1) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

El plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ tiene vector normal $(2, -1, 2)$, de módulo 3. La distancia de un punto P a este plano se calcula con

$$d(P, \pi) = \frac{|2x_P - y_P + 2z_P + 1|}{3}.$$

Para el punto $P(t) = (3 + t, 5 + t, -1 - t)$, el numerador se simplifica:

$$2(3 + t) - (5 + t) + 2(-1 - t) + 1 = -t.$$

Imponemos que la distancia sea una unidad: $|-t|/3 = 1$, de donde $t = 3$ o $t = -3$. Los puntos correspondientes son

$$P(3) = (6, 8, -4), \quad P(-3) = (0, 2, 2).$$

Conclusión. Los puntos de r que están a distancia 1 de π son $(6, 8, -4)$ y $(0, 2, 2)$.

Opción A - Ejercicio 2. Recta perpendicular a dos rectas

Expresamos ambas rectas en forma paramétrica. Elegimos $R = (0, -3, -3)$ y $\vec{d}_r = (1, 1, 2)$ para r , y $S = (0, -7, -4)$ y $\vec{d}_s = (1, 2, 1)$ para s :

$$r : (x, y, z) = (0, -3, -3) + t(1, 1, 2), \quad s : (x, y, z) = (0, -7, -4) + u(1, 2, 1).$$

Un vector perpendicular a las dos direcciones se obtiene con el producto vectorial:

$$(1, 1, 2) \times (1, 2, 1) = (-3, 1, 1).$$

Comprobamos la perpendicularidad mediante los productos escalares:

$$(3, -1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 0, \quad (3, -1, -1) \cdot (1, 2, 1) = 0.$$

La recta pedida pasa por $P = (2, -1, 2)$ y tomamos como vector director su opuesto, $(3, -1, -1)$. Aunque el enunciado pide la forma continua, la expresamos en forma paramétrica:

$$\ell : (x, y, z) = (2, -1, 2) + \lambda(3, -1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta por P perpendicular a las direcciones de r y s es ℓ como se ha indicado.

Opción A - Ejercicio 3. Discusión de un sistema con parámetro

Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada del sistema:

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1, \\ kx + y + z = k, \\ (k-1)x - 2y - z = k+1, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

El determinante distingue los casos en los que hay una solución única de aquellos que requieren comparar los rangos:

$$\det A = (k-2)(2k-1).$$

Si $k \neq 2, \frac{1}{2}$, el determinante no se anula, de modo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

Para $k = 2$ y $k = \frac{1}{2}$, la matriz de coeficientes tiene rango dos. Reduciendo las respectivas matrices ampliadas se obtiene

$$k = 2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad k = \frac{1}{2} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Para $k = 2$ los dos rangos valen dos, menor que el número de incógnitas: es un sistema compatible indeterminado. Para $k = \frac{1}{2}$, la última fila equivale a $0 = 1$, así que el rango de la ampliada es tres y el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $k \neq 2, \frac{1}{2}$, SCI si $k = 2$ y SI si $k = \frac{1}{2}$.

Cuando $k = 2$, las ecuaciones reducidas son

$$x + \frac{1}{5}z = \frac{7}{5}, \quad y + \frac{3}{5}z = -\frac{4}{5}.$$

Tomando $z = t$ como parámetro libre,

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{t}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3t}{5}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $k = 2$, las soluciones infinitas quedan descritas por la expresión anterior.

Opción A - Ejercicio 4. Extremos, inflexiones y primitiva

La función $f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$ tiene dominio $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 1 > 0$ para todo real. Para encontrar extremos relativos calculamos la primera derivada y resolvemos $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)(x^2+1) - 2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

El denominador es positivo y el numerador se anula en $x = -1$ y $x = 1$. La derivada es negativa en $(-\infty, -1)$, positiva en $(-1, 1)$ y negativa en $(1, +\infty)$. Por tanto, hay un mínimo relativo en $x = -1$ y un máximo relativo en $x = 1$:

$$f(-1) = \frac{5}{2}, \quad f(1) = \frac{7}{2}.$$

Para las inflexiones calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}.$$

El denominador no se anula y el numerador cambia de signo en $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$, por lo que los tres valores corresponden a puntos de inflexión. Sus ordenadas son

$$f(-\sqrt{3}) = 3 - \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad f(0) = 3, \quad f(\sqrt{3}) = 3 + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Conclusión. Hay un mínimo relativo en $(-1, \frac{5}{2})$, un máximo relativo en $(1, \frac{7}{2})$ e inflexiones en $(-\sqrt{3}, 3 - \frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0, 3)$ y $(\sqrt{3}, 3 + \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Para hallar F integramos f . Dividiendo el numerador por $x^2 + 1$,

$$f(x) = 3 + \frac{x}{x^2+1}.$$

En el segundo término usamos que $\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x$:

$$F(x) = \int f(x) dx = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

La condición $F(0) = 4$ da $C = 4$. **Conclusión.** Una función que cumple lo pedido es $F(x) = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 4$.

Opción B - Ejercicio 1. Ecuación matricial

Las matrices del enunciado verifican $B = 2A$ y $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden tres. Sustituimos estas relaciones en la ecuación

$$XA^2 + BA = A^2 : \\ XI + (2A)A = I \implies X + 2A^2 = I \implies X + 2I = I.$$

Por tanto,

$$X = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz buscada es $X = -I$.

Opción B - Ejercicio 2. Soluciones comunes y combinación de ecuaciones

El sistema es

$$E_1 : x + 2y - 3z = 3, \quad E_2 : 2x + 3y + z = 5.$$

a) Para que al añadir $ax + y + bz = 1$ no cambie el conjunto de soluciones, la nueva ecuación debe ser consecuencia de las dos anteriores. Buscamos números α, β tales que $\alpha E_1 + \beta E_2$ tenga exactamente esos coeficientes y ese término independiente:

$$\alpha + 2\beta = a, \quad 2\alpha + 3\beta = 1, \quad -3\alpha + \beta = b, \quad 3\alpha + 5\beta = 1.$$

Las dos ecuaciones correspondientes al coeficiente de y y al término independiente dan $\alpha = -2\beta$ y $-\beta = 1$, es decir, $\alpha = 2$, $\beta = -1$. De aquí,

$$a = 2 + 2(-1) = 0, \quad b = -6 - 1 = -7.$$

Conclusión. Los valores son $a = 0$ y $b = -7$; la ecuación añadida es $y - 7z = 1 = 2E_1 - E_2$.

b) Añadimos la condición $x + y + z = 4$ y resolvemos junto con el sistema. Restar esta ecuación a E_1 da $y - 4z = -1$; restar dos veces la condición a E_2 da $y - z = -3$. Así,

$$(4z - 1) = z - 3 \implies z = -\frac{2}{3},$$
$$y = z - 3 = -\frac{11}{3}, \quad x = 4 - y - z = \frac{25}{3}.$$

Conclusión. La solución cuya suma de coordenadas es cuatro es $(\frac{25}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{2}{3})$.

Opción B - Ejercicio 3. Plano que contiene una recta y es paralelo a otra

La primera recta se escribe como

$$r : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, -1, 2),$$

y la segunda es la intersección de los planos $x - 3y - 5 = 0$ y $x - 3z - 8 = 0$. Sus vectores normales son $(1, -3, 0)$ y $(1, 0, -3)$; por tanto, un vector director de s es su producto vectorial:

$$\vec{d}_s = (1, -3, 0) \times (1, 0, -3) = (9, 3, 3),$$

que podemos simplificar a $(3, 1, 1)$.

a) El plano que contiene a r y es paralelo a s debe contener los dos vectores directores $(1, -1, 2)$ y $(3, 1, 1)$. Su producto vectorial proporciona un vector normal:

$$\vec{n} = (1, -1, 2) \times (3, 1, 1) = (-3, 5, 4).$$

Tomamos el punto $(0, 1, 2)$ de r para obtener el término independiente:

$$-3x + 5(y - 1) + 4(z - 2) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\pi : 3x - 5y - 4z + 13 = 0.$$

Conclusión. El plano pedido es $3x - 5y - 4z + 13 = 0$.

b) Como s es paralela al plano, la distancia buscada es la distancia de cualquier punto de s al plano. El punto $S = (5, 0, -1)$ pertenece a s , pues satisface sus dos ecuaciones. Para un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, usamos

$$d(S, \pi) = \frac{|Ax_S + By_S + Cz_S + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos S y los coeficientes de π :

$$d(s, \pi) = \frac{|3 \cdot 5 - 5 \cdot 0 - 4(-1) + 13|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2}} = \frac{32}{\sqrt{50}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}.$$

Conclusión. La distancia entre s y π es $\frac{16\sqrt{2}}{5}$.

Opción B - Ejercicio 4. Análisis de una función a partir de sus propiedades

La función g es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, así que no puede tener asíntotas verticales. Según el límite dado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3,$$

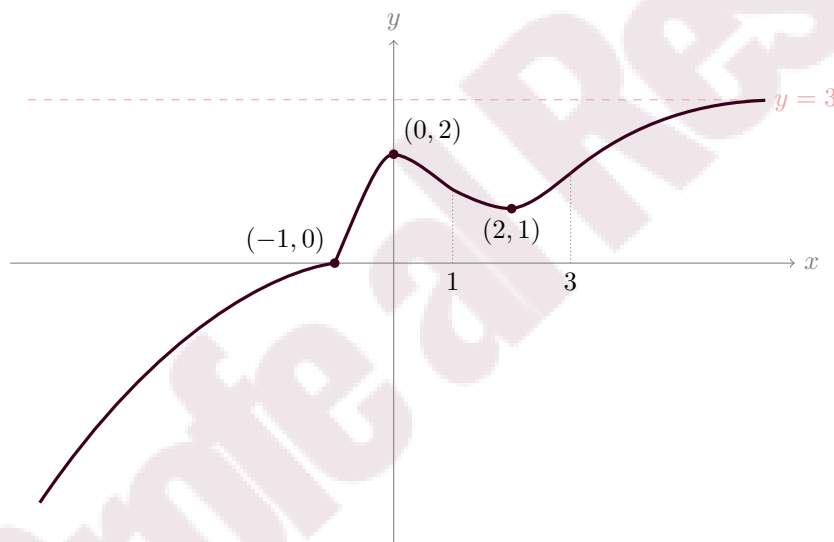
por lo que $y = 3$ es asíntota horizontal en $+\infty$. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, no existe asíntota horizontal en $-\infty$.

Para que hubiese una asíntota oblicua en $-\infty$ habría que poder calcular

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx),$$

con m finito y distinto de cero. Los datos del enunciado no fijan esos límites: describen el sentido de variación, la concavidad y el límite de g , pero no su crecimiento con precisión suficiente para obtener una pendiente y una ordenada al origen asíntóticas. Por ello, no se puede asegurar ni descartar una oblicua en $-\infty$ solo con esta información. En $+\infty$ la asíntota horizontal ya describe el comportamiento y no puede haber además una oblicua distinta. **Conclusión.** No hay asíntotas verticales; hay una horizontal $y = 3$ en $+\infty$ y ninguna horizontal en $-\infty$. La existencia de una oblicua en $-\infty$ no queda determinada por los datos.

La gráfica es creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$. Por tanto, presenta un máximo relativo en $(0, 2)$ y un mínimo relativo en $(2, 1)$. Es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$, y hacia arriba en $(1, 3)$, así que cambia de concavidad en $x = 1$ y $x = 3$. Además, pasa por $(-1, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 1)$, tiende a $-\infty$ a la izquierda y a 3 por la derecha.



La curva se dibuja de forma esquemática; el comportamiento del extremo izquierdo no permite fijar si hay una asíntota oblicua. **Conclusión.** El esbozo respeta los intervalos de crecimiento y concavidad, los puntos dados y los límites del enunciado.

Por el teorema fundamental del cálculo, si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$, entonces $G'(x) = g(x)$ porque g es continua. Como $g(-1) = 0$,

$$G'(-1) = g(-1) = 0.$$

Conclusión. Un valor que cumple la condición es $x_0 = -1$.