

Modelo 5 de 2003

Funciones a trozos, sistemas, áreas, matrices y distancias.

Opción A - Ejercicio 1

La definición no asigna ningún valor a $f(1)$, así que, estrictamente, 1 no pertenece al dominio y no se pueden definir derivadas laterales de f en ese punto. Las derivadas de las dos expresiones de las ramas, evaluadas en 1, serían 2 y -2, respectivamente. Además, sus límites laterales son 4 y 1, por lo que no existe una elección de $f(1)$ que permita una extensión continua en 1. Para estudiar la monotonía en el dominio:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1, \\ -2x, & x > 1. \end{cases}$$

En $(-\infty, 0)$ la función decrece, en $(0, 1)$ crece y en $(1, +\infty)$ decrece. En $x = 0$ hay un mínimo relativo, con $f(0) = 3$; el punto $x = 1$ está excluido del dominio. **Opción A - Ejercicio 2**

Las curvas se cortan cuando $x^2 = \lambda x$, es decir, en $x = 0$ y $x = \lambda$. Como $\lambda > 0$, la recta queda por encima de la parábola entre esos dos puntos. El área vale

$$1 = \int_0^\lambda (\lambda x - x^2) dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{6}.$$

Luego $\lambda = \sqrt[3]{6}$. **Opción A - Ejercicio 3**

Pasamos las incógnitas al lado izquierdo para formar las matrices del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & -1 \\ m & -1 & 2 \\ 6 & -10 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & -2 \\ m & -1 & 2 & 5 \\ 6 & -10 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

El determinante es $\det A = -(m-3)(m+5)$. Si $m \neq 3, -5$, el sistema es compatible determinado (SCD). Para $m = 3$, ambos rangos son 2, así que es compatible indeterminado (SCI); por ejemplo, sus soluciones son

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{4} - 7t, \frac{3}{4} - 5t, 1 + 8t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $m = -5$, $\text{rg}(A) = 2$. La combinación 7 veces la primera ecuación más 5 veces la segunda y 3 veces la tercera elimina las incógnitas, pero da $0 = 8$; por ello $\text{rg}(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible (SI). El sistema es compatible indeterminado para $m = 3$. En ese caso, tomando $t = 0$ se obtiene una solución particular $X_0 = (5/4, 3/4, 1)$ y la dirección de las soluciones es $(-7, -5, 8)$. **Opción A - Ejercicio 4**

El plano corta los semiejes positivos a distancia 4 del origen, así que sus puntos de corte son $A = (4, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ y $C = (0, 0, 4)$. Su ecuación es $x + y + z = 4$. Para el área del triángulo usamos dos vectores de sus lados:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-4, 0, 4), \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (16, 16, 16).$$

Por tanto, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = 8\sqrt{3}$. Un plano paralelo tiene ecuación $x + y + z = k$. Su distancia al origen es $|k|/\sqrt{3}$; al imponer que valga 4, resulta $k = \pm 4\sqrt{3}$. Por ejemplo, $x + y + z = 4\sqrt{3}$ es uno de los planos pedidos (también sirve $x + y + z = -4\sqrt{3}$).

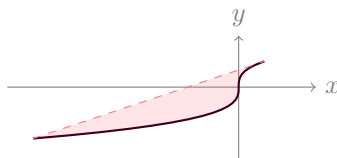
Opción B - Ejercicio 1

En $x = 1$, $f(1) = 1$ y $f'(1) = 1/3$, así que la tangente es

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1) \implies y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Para hallar los puntos de corte, ponemos $u = \sqrt[3]{x}$, de modo que $x = u^3$. La igualdad $u = u^3/3 + 2/3$ equivale a $(u - 1)^2(u + 2) = 0$, por lo que los cortes son $x = 1$ y $x = -8$. En el intervalo $[-8, 1]$ la recta está por encima de $\sqrt[3]{x}$. El área encerrada es

$$S = \int_{-8}^1 \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3} - \sqrt[3]{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}x^{4/3} \right]_{-8}^1 = \boxed{\frac{27}{4}}.$$



Opción B - Ejercicio 2

Dividimos para separar la parte polinómica:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 2} = 2x - 4 + \frac{10}{x + 2}.$$

El valor $x = -2$ anula el denominador y no el numerador, por lo que $x = -2$ es una asíntota vertical. Como $10/(x + 2) \rightarrow 0$ en ambos infinitos, la asíntota oblicua es $y = 2x - 4$. La diferencia

$$f(x) - (2x - 4) = \frac{10}{x + 2}$$

es negativa para $x < -2$ y positiva para $x > -2$; la gráfica queda debajo de la oblicua a la izquierda de la asíntota vertical y encima a la derecha. **Opción B - Ejercicio 3**

La matriz triangular superior $M(x)$ tiene determinante 2^x , que es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, existe la inversa para cualquier real y

$$(M(x))^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para el apartado (b),

$$M(3)M(x) = \begin{pmatrix} 2^{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(5) = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La igualdad exige $2^{x+3} = 32$ y $x + 3 = 5$; ambas condiciones dan $\boxed{x = 2}$. **Opción B - Ejercicio 4**

Sean $R = (1 + \alpha, \alpha, -\alpha)$ en r y $S = (\beta, 2 + 2\beta, 0)$ en s . Sus vectores directores son $d_r = (1, 1, -1)$ y $d_s = (1, 2, 0)$. Para que RS sea la perpendicular común, el vector $S - R$ debe ser perpendicular a ambos:

$$(S - R) \cdot d_r = 0, \quad (S - R) \cdot d_s = 0.$$

Al resolver se obtiene $\alpha = -2/3$ y $\beta = -1$. Por tanto, los puntos más próximos son

$$R = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right), \quad S = (-1, 0, 0).$$