

Junio de 2014 · Convocatoria ordinaria

Resolvemos cada apartado paso a paso. Antes de calcular, indicamos qué idea matemática vamos a usar; después sustituimos los datos y explicamos qué significa el resultado.

Pregunta A1 · Sistema según el parámetro k

Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + 4y + 5z = k - 2, \\ x + k^2y + 3z = 2k. \end{cases}$$

1. Clasificación para cada valor de k

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_k^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & k-2 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \end{pmatrix}.$$

Si $\det(A_k) \neq 0$, la matriz tiene rango 3 y el sistema tiene una única solución. Si el determinante vale 0, calcularemos los rangos de A_k y A_k^* para aplicar Rouché-Frobenius.

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= 1(12 - 5k^2) - 3(6 - 5) + 2(2k^2 - 4) \\ &= 12 - 5k^2 - 3 + 4k^2 - 8 \\ &= 1 - k^2 = (1 - k)(1 + k). \end{aligned}$$

El determinante se anula cuando $k = 1$ o $k = -1$.

Caso $k \neq 1$ y $k \neq -1$. Como $\det(A_k) \neq 0$, se tiene

$$\operatorname{rg}(A_k) = \operatorname{rg}(A_k^*) = 3.$$

Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD): tiene una única solución.

Caso $k = -1$. Las filas de coeficientes cumplen

$$(1, 1, 3) = (2, 4, 5) - (1, 3, 2),$$

y también se cumple la misma relación en los términos independientes:

$$-2 = -3 - (-1).$$

Así, la tercera ecuación es la segunda menos la primera, y no añade una condición nueva. Para comprobar el rango de la matriz ampliada, escribimos

$$A_{-1}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

El menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas x, y es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0,$$

Este mismo menor aparece en A_{-1} y en A_{-1}^* , así que ambos rangos son al menos 2. La dependencia de la tercera fila de A_{-1}^* con las dos primeras prueba además que su rango no supera 2. Así, los rangos son:

$$\operatorname{rg}(A_{-1}) = \operatorname{rg}(A_{-1}^*) = 2 < 3$$

Como el rango común es menor que el número de incógnitas, por Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado (SCI) y tiene infinitas soluciones.

Tomamos $z = t$. Restando la tercera ecuación de la primera obtenemos $2y - z = 1$; luego $y = (1 + t)/2$. La tercera ecuación da $x = -2 - y - 3t$. Por tanto,

$$(x, y, z) = \left(-\frac{5}{2} - \frac{7}{2}t, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso $k = 1$. El menor de coeficientes anterior sigue valiendo -2 , por lo que $\text{rg}(A_1) = 2$. Para la ampliada calculamos un menor de orden 3 usando las columnas de x, y y de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A_1^*) = 3$, y

$$\text{rg}(A_1) = 2 < 3 = \text{rg}(A_1^*).$$

Por Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible (SI): no tiene solución.

2. Resolución para $k = 0$

Al sustituir $k = 0$, el sistema queda

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + 4y + 5z = -2, \\ x + 3z = 0. \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $x = -3z$. Sustituimos en las dos primeras:

$$\begin{aligned} -3z + 3y + 2z &= -1 \implies z = 3y + 1, \\ -6z + 4y + 5z &= -2 \implies z = 4y + 2. \end{aligned}$$

Iguamos las dos expresiones de z :

$$3y + 1 = 4y + 2 \implies y = -1.$$

Entonces $z = 3(-1) + 1 = -2$ y $x = -3(-2) = 6$. La solución es

$$(x, y, z) = (6, -1, -2).$$

Pregunta A2 · Rectas y planos

Se considera $A = (-1, 0, 2)$ y las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2, \quad s: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda, \\ y = 1 + 3\lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Escribimos r en forma paramétrica poniendo cada cociente igual a t :

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 3t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, $R = (1, 0, 2)$ es un punto de r , su vector director es $\vec{u} = (2, 3, 1)$, y para s podemos tomar $S = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$.

a) Plano π que pasa por A y contiene a r

Un vector normal al plano se obtiene con el producto vectorial de dos vectores paralelos al plano. Usamos el director de r y el vector $\overrightarrow{RA} = A - R = (-2, 0, 0)$:

$$\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \overrightarrow{RA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -2, 6) \sim (0, -1, 3).$$

La ecuación general de un plano con normal $(0, -1, 3)$ que pasa por $A = (-1, 0, 2)$ es

$$0(x+1) - y + 3(z-2) = 0, \quad \boxed{\pi: -y + 3z - 6 = 0}.$$

b) Plano σ que pasa por A y es perpendicular a s

Como σ es perpendicular a s , un vector director de s es normal a σ . Usamos $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ como normal y hacemos pasar el plano por A :

$$-2(x+1) + 3y + (z-2) = 0 \implies \boxed{\sigma: -2x + 3y + z - 4 = 0}.$$

c) Recta intersección de π y σ

Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_\pi = (0, -1, 3)$ y $\vec{n}_\sigma = (-2, 3, 1)$. El producto vectorial da un vector director de la recta común:

$$\vec{d} = \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\sigma = (-10, -6, -2) \sim (5, 3, 1).$$

Ambos planos contienen A , así que la recta pasa por ese punto. En forma paramétrica:

$$\ell : \begin{cases} x = -1 + 5t, \\ y = 3t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Distancia entre s y ℓ

Las rectas no son paralelas porque sus directores $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ y $\vec{d} = (5, 3, 1)$ no son proporcionales. Para comprobar que no se cortan, usamos el producto mixto entre ambos directores y un vector que une un punto de cada recta. Tomamos $S = (-1, 1, 1) \in s$ y $Q = (-11, -6, 0) \in \ell$ (se obtiene en ℓ con $t = -2$):

$$\vec{SQ} = Q - S = (-10, -7, -1), \quad (\vec{v} \times \vec{d}) \cdot \vec{SQ} = (0, 7, -21) \cdot (-10, -7, -1) = -28 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo confirma que las rectas son alabeadas. La distancia entre dos rectas alabeadas se calcula mediante la fórmula:

$$d(s, \ell) = \frac{|\vec{SQ} \cdot (\vec{v} \times \vec{d})|}{\|\vec{v} \times \vec{d}\|}.$$

Sustituimos:

$$d(s, \ell) = \frac{28}{\sqrt{0^2 + 7^2 + (-21)^2}} = \frac{28}{7\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Pregunta A3 · Continuidad, estudio de una función e integral

La función del apartado de continuidad es

$$f(x) = \begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x \leq 0, \\ \frac{(x+1)\sin x}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Valor de m para que f sea continua

Cada expresión es continua en su intervalo. Solo debemos igualar el valor y el límite lateral en $x = 0$. Por la rama izquierda, $f(0) = m$. Por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)\sin x}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

La continuidad exige $m = 1$. Por tanto,

$$m = 1.$$

b) Dominio, crecimiento, extremos y asíntotas de $h(x) = (x+1)e^{2x}$

Dominio. La función es el producto de un polinomio, definido para todo real, y una exponencial, también definida para todo real. No hay denominadores ni raíces que impongan restricciones. Por eso,

$$\text{Dom}(h) = \mathbb{R}.$$

Derivada y puntos críticos. Aplicamos la regla del producto:

$$h'(x) = (x+1)'e^{2x} + (x+1)(e^{2x})' = e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} = e^{2x}(2x+3).$$

Como $e^{2x} > 0$ para todo real, la derivada se anula únicamente cuando

$$2x + 3 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}.$$

Probamos un valor a cada lado en h' : para $x = -2$, $h'(-2) = e^{-4}(-1) < 0$; para $x = 0$, $h'(0) = 3 > 0$.

Intervalo o punto	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}, \infty)$
Signo de $h'(x)$	$-$	0	$+$
Comportamiento	Decreciente	Mínimo	Creciente

La derivada cambia de negativa a positiva, así que hay un mínimo en $x = -\frac{3}{2}$. Su valor es

$$h\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + 1\right)e^{-3} = -\frac{1}{2e^3}.$$

El mínimo es $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2e^3})$. Además, $h(x) \rightarrow 0^-$ cuando $x \rightarrow -\infty$ y $h(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$, por lo que este mínimo también es global.

Asíntotas. No hay asíntotas verticales: el dominio es todo $\mathbb{R}$ y h es finita en cada número real. Para $x \rightarrow -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{2x} = 0,$$

porque la exponencial tiende a cero más rápidamente de lo que crece $|x+1|$. Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda. Para $x \rightarrow +\infty$, $h(x) \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntota horizontal. Tampoco hay oblicua por la derecha, pues

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{2x} = +\infty,$$

y la pendiente de una posible asíntota oblicua no sería finita. No existen asíntotas oblicuas por la izquierda porque allí ya hay una asíntota horizontal.

c) Primitiva y área entre $x = 0$ y $x = 1$

Para integrar $(x+1)e^{2x}$, usamos integración por partes:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Elegimos $u = x+1$, $du = dx$, $dv = e^{2x}dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int (x+1)e^{2x} \, dx &= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \, dx \\ &= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \\ &= \boxed{\frac{(2x+1)e^{2x}}{4} + C}. \end{aligned}$$

En el intervalo $[0, 1]$, $x+1 > 0$ y $e^{2x} > 0$, así que la función está por encima del eje x . El área es la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x+1)e^{2x} \, dx &= \left[\frac{(2x+1)e^{2x}}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{3e^2}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \boxed{\frac{3e^2 - 1}{4}}. \end{aligned}$$

Pregunta B1 · Operaciones con matrices

Se dan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = (-1 \quad 1 \quad 3).$$

a) Cálculo de A^{-1}

La matriz es triangular y sus elementos diagonales son 1, así que $\det(A) = 1 \neq 0$ y existe A^{-1} . Para calcularla, reducimos la ampliada $(A \mid I)$. Primero hacemos $F_2 \leftarrow F_2 - F_3$; después, $F_1 \leftarrow F_1 + F_2$ y $F_1 \leftarrow F_1 - F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

La parte derecha de la matriz reducida es A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos el resultado multiplicando:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

Luego la inversa indicada es correcta.

b) Cálculo de $X = A^{-1}BC$

Hacemos primero la multiplicación $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora multiplicamos ese resultado por C :

$$\begin{aligned} X &= (A^{-1}B)C \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (-1 \quad 1 \quad 3) \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

c) Determinante de $2M^3$

Para una matriz cuadrada de orden 2, $\det(cM) = c^2 \det(M)$; además, $\det(M^3) = (\det M)^3$. Con $\det M = \frac{1}{2}$:

$$\det(2M^3) = 2^2(\det M)^3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Pregunta B2 · Planos y recta de intersección

Los vértices del triángulo son $A = (1, 2, -2)$, $B = (0, -3, 1)$ y $C = (-1, 0, 0)$. Además, se consideran los planos $\pi_1 : x + y + z + 1 = 0$ y π_2 , cuya ecuación paramétrica es

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 1 - \alpha + \beta, \\ y = \alpha - 2\beta, \\ z = \alpha + \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Plano del triángulo y posición relativa con π_1

Calculamos dos vectores del plano del triángulo:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -5, 3), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-2, -2, 2).$$

Un vector normal es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, -4, -8) \sim (1, 1, 2).$$

Usamos ese vector normal y el punto A para escribir el plano en forma general:

$$(x - 1) + (y - 2) + 2(z + 2) = 0 \implies \boxed{\pi_T : x + y + 2z + 1 = 0}.$$

Los vectores normales de π_T y π_1 son $(1, 1, 2)$ y $(1, 1, 1)$. No son proporcionales, así que los planos se cortan en una recta. Para hallarla, restamos sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \implies z = 0, \quad x + y + 1 = 0.$$

Tomando $y = t$, la intersección en forma paramétrica es

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 - t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Forma general de π_2 y ángulo entre los planos

De la representación paramétrica de π_2 identificamos un punto $P = (1, 0, 0)$ y dos vectores directores:

$$\vec{p} = (-1, 1, 1), \quad \vec{q} = (1, -2, 1).$$

El producto vectorial da una normal:

$$\vec{n}_2 = \vec{p} \times \vec{q} = (3, 2, 1).$$

Usando el punto P , convertimos a la ecuación general:

$$3(x - 1) + 2y + z = 0 \implies \boxed{\pi_2 : 3x + 2y + z - 3 = 0}.$$

El coseno del ángulo entre los vectores normales se calcula con el producto escalar. Para π_1 , $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$; para π_2 , $\vec{n}_2 = (3, 2, 1)$. Aplicamos

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Al sustituir:

$$\cos \theta = \frac{|3 + 2 + 1|}{\sqrt{3} \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0.9258.$$

Por tanto, el coseno pedido es $\frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0.9258$.

c) Recta intersección de π_1 y π_2

Resolvemos las ecuaciones generales de ambos planos:

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ 3x + 2y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Restamos la primera ecuación de la segunda y obtenemos $2x + y = 4$. Tomamos $z = t$. De la primera ecuación, $x + y = -1 - t$. Restamos esta igualdad de $2x + y = 4$:

$$\begin{aligned}(2x + y) - (x + y) &= 4 - (-1 - t), \\ x &= 5 + t, \\ y &= -1 - t - (5 + t) = -6 - 2t.\end{aligned}$$

La recta queda en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -6 - 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

Pregunta B3 · Área máxima del rectángulo

El cuadrado tiene lado **80** cm. El punto $P = (x, y)$ se mueve por el segmento inclinado AB , cuyos extremos son $A = (0, 20)$ y $B = (20, 0)$. El rectángulo queda dentro del cuadrado y sus lados son paralelos a los lados del cuadrado.

La recta AB pasa por $(0, 20)$ y $(20, 0)$, por lo que su ecuación es $x + y = 20$. Así,

$$y = 20 - x, \quad 0 \leq x \leq 20.$$

El ancho del rectángulo es $80 - x$; su alto es $80 - y = 80 - (20 - x) = 60 + x$. Por tanto, su área en función de x es

$$A(x) = (80 - x)(60 + x) = 4800 + 20x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 20.$$

Como el dominio es el intervalo cerrado $[0, 20]$, buscamos los puntos críticos interiores y comparamos también los extremos. Derivamos:

$$A'(x) = 20 - 2x.$$

Igualemos a cero:

$$20 - 2x = 0 \implies x = 10.$$

Probamos el signo de la derivada en un punto a cada lado de 10: $A'(5) = 20 - 2 \cdot 5 = 10 > 0$ y $A'(15) = 20 - 2 \cdot 15 = -10 < 0$. El signo cambia de positivo a negativo, así que el área crece antes de 10 y decrece después. La tabla resume el comportamiento:

Intervalo o punto	$[0, 10)$	10	$(10, 20]$
Signo de $A'(x)$	+	0	-
Comportamiento	Crece	Máximo	Decrece

Comparamos también los extremos del intervalo cerrado:

$$A(0) = 4800, \quad A(10) = 4900, \quad A(20) = 4800.$$

El área máxima es **4900 cm²**, cuando $x = 10$ y $y = 20 - 10 = 10$. El rectángulo óptimo tiene vértices $(10, 10)$, $(80, 10)$, $(80, 80)$ y $(10, 80)$.