

Convocatoria extraordinaria de 2022

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

Dividimos numerador y denominador por x :

$$\frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = \frac{a}{(\ln x)^3/x + 2}.$$

Como $(\ln x)^3/x \rightarrow 0$, el límite es $a/2$. Al igualarlo a 1, obtenemos $a = 2$.

Ejercicio 2

Por simetría, si $x > 0$ es la semibase, la altura es $12 - x^2$ y el área del rectángulo es

$$A(x) = 2x(12 - x^2), \quad 0 < x < \sqrt{12}.$$

Derivando, $A'(x) = 24 - 6x^2$, que se anula en $x = 2$; además $A''(2) = -24 < 0$, luego es un máximo. La altura es 8 y la base 4. Los vértices son $(-2, 0), (2, 0), (-2, 8), (2, 8)$ y el área máxima vale 32.

Ejercicio 3

Con $t = \sqrt{1+x} - 1$, se tiene $x = t^2 + 2t$, $dx = 2(t+1)dt$, y los límites $x = 3, 8$ se convierten en $t = 1, 2$. Así,

$$\int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x} - 1} = 2 \int_1^2 \frac{t+1}{t} dt = 2[t + \ln t]_1^2 = 2 + 2\ln 2.$$

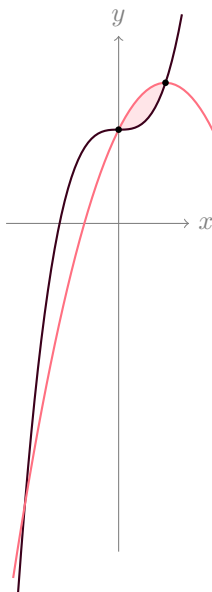
Ejercicio 4

Igualamos f y g :

$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \iff x(x+2)(x-1) = 0.$$

Los cortes son $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 3)$. En el primer cuadrante, el recinto cerrado está entre $x = 0$ y $x = 1$; allí $g - f = -x^3 - x^2 + 2x > 0$. El área es

$$S = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx = \frac{5}{12}.$$



Ejercicio 5

El determinante de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es $-2a(a-2)$. Por tanto, B no tiene inversa si $\boxed{a=0 \text{ o } a=2}$.

Para $a=1$, la matriz es invertible y la ecuación $AXB=C$ se resuelve como $X=A^{-1}CB^{-1}$. Con $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, se obtiene

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Sea D el determinante inicial, con $D=-2$. En el primer determinante, se permutan las dos últimas columnas y se permutan las filas segunda y tercera; esos dos cambios de signo se cancelan, mientras que las escalas de las filas aportan $2 \cdot (-3) = -6$. Por tanto, el determinante vale $-6D = \boxed{12}$.

En el segundo, llamando C_1, C_2, C_3 a las columnas de la matriz inicial, las columnas son $X, A-3P$ y $-2A$. Por linealidad, el término con dos columnas A se anula y queda $6 \det(X, P, A)$. Reordenar estas columnas a (A, P, X) cambia el signo, así que el resultado es $-6D = \boxed{12}$.

Ejercicio 7

Parametrizamos r como $(x, y, z) = (-1+t, a+t, -t)$. En s , $x = 5+2\lambda$, $y = -3$, $z = 2-\lambda$. Igualando y, z , tenemos $t = -3 - a$ y $\lambda = 2 + t$. La coordenada x exige $-1+t = 9+2t$, de donde $t = -10$, $a = 7$ y $\lambda = -8$. El punto de corte es $\boxed{(-11, -3, 10)}$.

Un punto de s es $(5, -3, 2)$ y su director es $(2, 0, -1)$. El vector desde este punto a $P = (8, -7, 2)$ es $(3, -4, 0)$; su producto vectorial con el director da un normal $(-4, -3, -8)$. El plano buscado es

$$\boxed{-4x - 3y - 8z + 27 = 0}.$$

Ejercicio 8

La recta r en forma paramétrica es $(x, y, z) = (t, 3t, t+1)$. Al sustituir en $x+y-z=2$, resulta $3t-1=2$, así que el corte es $\boxed{(1, 3, 2)}$.

Para reflejar $Q = (2, 6, 3)$ respecto de π , usamos el normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$. El valor $x+y-z-2$ en Q es 3 y $|\vec{n}|^2 = 3$, por lo que el pie es $H = Q - \vec{n} = (1, 5, 4)$. El simétrico es $Q' = 2H - Q = \boxed{(0, 4, 5)}$.