

Junio de 2025 · Convocatoria ordinaria de reserva

En cada apartado indicamos qué se pide, la regla que permite resolverlo y cómo se sustituyen los datos. Conservamos primero los resultados exactos; añadimos aproximaciones cuando ayudan a interpretar una probabilidad o una medida.

Pregunta 1 · Probabilidad y estadística

Una fábrica produce coches en tres países. Sea D el suceso «el coche tiene algún defecto» y $\bar{D}$ «el coche no tiene defectos». Para seguir el árbol sin que las ramas corten las etiquetas, anotamos cada recorrido completo en una tabla: país de fabricación, resultado del control y probabilidad conjunta de esa ruta.

La regla que utilizamos en cada ruta es

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A).$$

Por ejemplo, para un coche fabricado en Estados Unidos que no tiene defecto:

$$P(\text{EE. UU.} \cap \bar{D}) = P(\text{EE. UU.})P(\bar{D} | \text{EE. UU.}) = 0.35(1 - 0.03) = 0.35(0.97) = 0.3395.$$

Primera rama: país	$P(\text{país})$	Segunda rama: resultado	$P(\text{resultado} \text{país})$	Probabilidad conjunta de la ruta
EE. UU.	$0.35 = 7/20$	Defectuoso	0.03	$0.35 \cdot 0.03 = 21/2000$
EE. UU.	$0.35 = 7/20$	Sin defecto	0.97	$0.35 \cdot 0.97 = 679/2000$
China	$0.45 = 9/20$	Defectuoso	0.04	$0.45 \cdot 0.04 = 9/500$
China	$0.45 = 9/20$	Sin defecto	0.96	$0.45 \cdot 0.96 = 54/125$
Alemania	$0.20 = 1/5$	Defectuoso	0.01	$0.20 \cdot 0.01 = 1/500$
Alemania	$0.20 = 1/5$	Sin defecto	0.99	$0.20 \cdot 0.99 = 99/500$

Cada fila representa una ruta completa del árbol: país, resultado condicionado y probabilidad conjunta. No dibujamos ramas sobre el texto, para que se vea claramente a qué suceso corresponde cada valor. Las probabilidades de las dos ramas de resultado de cada país suman 1; por ejemplo, $0.03 + 0.97 = 1$.

1.1 Probabilidad de que un coche elegido al azar tenga defecto

Qué buscamos. Un coche defectuoso puede proceder de cualquiera de los tres países. Sumamos las probabilidades de las tres rutas que terminan en D (regla de la suma para sucesos incompatibles):

$$\begin{aligned}P(D) &= P(\text{EE. UU.} \cap D) + P(\text{China} \cap D) + P(\text{Alemania} \cap D) \\&= 0.35(0.03) + 0.45(0.04) + 0.20(0.01) \\&= 0.0105 + 0.018 + 0.002 \\&= 0.0305 = \frac{61}{2000}.\end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de defecto es 0.0305, es decir, un 3.05 %.

1.2 Probabilidad de que, sabiendo que no tiene defecto, proceda de EE. UU.

Qué buscamos. Es una probabilidad condicionada: nos quedamos solo con los coches sin defecto. La definición es

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Aquí $A = \text{EE. UU.}$ y $B = \bar{D}$. Primero obtenemos la probabilidad total de no tener defecto:

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{61}{2000} = \frac{1939}{2000}.$$

La ruta «EE. UU. y sin defecto» tiene probabilidad (679/2000), según la tabla. Sustituimos:

$$P(\text{EE. UU.} | \bar{D}) = \frac{679/2000}{1939/2000} = \frac{679}{1939} = \frac{97}{277} \approx 0.35018.$$

Así, entre los coches sin defecto, aproximadamente el 35.02 % procede de EE. UU.

1.3 Probabilidad de que al menos 3 de 9 coches alemanes sean del modelo M2

Qué buscamos. En la planta alemana, el 40 % de los coches son del modelo M2, así que la probabilidad para cada coche es $p = 0.40 = 2/5$; la de no ser M2 es $1 - p = 0.60 = 3/5$. Si se seleccionan 9 coches independientemente, el número X de coches M2 sigue una binomial $X \sim B(9, 0.40)$. Queremos $P(X \geq 3)$. La probabilidad de obtener exactamente k coches M2 es

$$P(X = k) = \binom{9}{k} (0.40)^k (0.60)^{9-k}.$$

Es más sencillo calcular el suceso contrario, $X \leq 2$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^2 \binom{9}{k} (0.40)^k (0.60)^{9-k} \\ &= 1 - \left[\binom{9}{0} (0.40)^0 (0.60)^9 + \binom{9}{1} (0.40) (0.60)^8 + \binom{9}{2} (0.40)^2 (0.60)^7 \right] \\ &= \boxed{\frac{1500416}{1953125} \approx 0.768213}. \end{aligned}$$

La probabilidad pedida es aproximadamente el 76.82 %.

Pregunta 2 · Álgebra

2.1 Discusión del sistema según el parámetro

El sistema del enunciado es

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30, \\ -2x + y + z = 4, \\ 2x - y + \alpha z = 10. \end{cases}$$

Para clasificarlo usamos Rouché–Frobenius: es compatible si $(\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*))$; si además ese rango es (3), tiene solución única, y si es menor que (3), tiene infinitas soluciones. Si los rangos son distintos, no tiene solución.

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{array} \right).$$

Primero estudiamos el determinante de (A):

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(\alpha + 1) - 4(-2\alpha - 2) + \alpha(0) \\ &= 11(\alpha + 1). \end{aligned}$$

Caso 1: $\alpha \neq -1$. Entonces $\det A \neq 0$, así que $(\text{rg}(A) = 3)$. La matriz ampliada también tiene rango (3), porque solo tiene tres filas. Por Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD). Aplicamos Cramer, con $(=11(+1))$:

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 30 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 70, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 3 & 30 & \alpha \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & \alpha \end{vmatrix} = 44\alpha + 30, \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 154. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{70}{11(\alpha+1)}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2(22\alpha+15)}{11(\alpha+1)}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{14}{\alpha+1}.$$

Caso 2: $\alpha = -1$. El determinante se anula, así que hay que comparar rangos mediante menores. El menor de (A) formado por las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11 \neq 0.$$

Así, (rg(A)=2); como **det A = 0**, concluimos que (rg(A)=2). En la ampliada, tomamos las columnas de (x,y) y términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 154 \neq 0.$$

Este menor de orden (3) demuestra que (rg(A*)=3). Por tanto,

$$\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*),$$

y el sistema es incompatible (SI). No hay ningún valor de α que dé un sistema compatible indeterminado.

2.2 Operaciones con matrices

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}.$$

Producto (AB) y traspuesta. Multiplicamos fila por columna:

$$AB = \begin{pmatrix} 2(-1) + 3(1) & 2(2) + 3(5) \\ (-1)(-1) + m(1) & (-1)(2) + m(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ m+1 & 5m-2 \end{pmatrix}.$$

La traspuesta intercambia filas y columnas:

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & m+1 \\ 19 & 5m-2 \end{pmatrix}.$$

Invertibilidad de (A) e inversa. Para una matriz cuadrada de orden (2), es invertible si y solo si su determinante no es cero:

$$\det A = 2m - 3(-1) = 2m + 3.$$

Así, (A) es invertible exactamente cuando $m \neq -3/2$. Usando la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 :

$$A^{-1} = \frac{1}{2m+3} \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, m \neq -\frac{3}{2}.$$

Ecuación $BX + A^2 = C$. Aislamos (X): $BX = C - A^2$. Como

$$\det B = (-1)5 - 2(1) = -7 \neq 0, B^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

podemos multiplicar por B^{-1} por la izquierda y obtenemos ($X = B^{-1}(C - A^2)$). Calculamos por separado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3m+6 \\ -m-2 & m^2-3 \end{pmatrix},$$

$$C - A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3m-7 \\ m+7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3m-7 \\ m+7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2m+19 & 15m+41 \\ m+6 & -3m-4 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 3 · Geometría

3.1 Plano y recta

El plano es $\pi: 2x + \alpha y - z + 3 = 0$, y el punto del apartado de distancia es $(Q=(3,1,-2))$. El vector normal del plano es $(n=2, \alpha, -1)$. La distancia de un punto $(Q=x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es

$$d(Q, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos los coeficientes y las coordenadas:

$$d(Q, \pi) = \frac{|2(3) + \alpha(1) - (-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + \alpha^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha + 11|}{\sqrt{\alpha^2 + 5}}.$$

La recta (r) viene dada como intersección de los planos $2x + 4y - z = 0$ y $-x + y + 5z = -3$. Sus normales son $(n_1=(2,4,-1))$ y $(n_2=(-1,1,5))$. El vector director se obtiene con el producto vectorial:

$$n_1 \times n_2 = (21, -9, 6) = 3(7, -3, 2),$$

por lo que podemos tomar $(v_r=(7,-3,2))$. El punto $((2,-1,0))$ pertenece a ambos planos; así, exclusivamente en forma paramétrica,

$$r: x = 2 + 7t, y = -1 - 3t, z = 2t, t \in \mathbb{R}.$$

Ángulo cuando $\alpha = 4$. El normal de π es $(n=(2,4,-1))$. Para el ángulo θ entre una recta de director v_r y un plano de normal (n), usamos

$$\sin \theta = \frac{|v_r \cdot n|}{\|v_r\| \|n\|}.$$

En este caso,

$$v_r \cdot n = (7, -3, 2) \cdot (2, 4, -1) = 14 - 12 - 2 = 0,$$

de modo que $\sin \theta = 0$ y

$$\theta = 0^\circ.$$

El punto $(2, -1, 0)$ de la recta no pertenece al plano, pues $2(2) + 4(-1) - 0 + 3 = 3 \neq 0$. Por tanto, la recta es paralela al plano y no está contenida en él.

Simétrico para $\alpha = 3$. Ahora el plano es $2x + 3y - z + 3 = 0$, su normal es $(n=(2,3,-1))$, y el punto es $(P=(9/2, 5, -1))$. Evaluamos la expresión del plano:

$$F(P) = 2\left(\frac{9}{2}\right) + 3(5) - (-1) + 3 = 28, \|n\|^2 = 2^2 + 3^2 + (-1)^2 = 14.$$

La reflexión de (P) respecto del plano se calcula con

$$P' = P - 2 \frac{F(P)}{\|n\|^2} n.$$

Sustituyendo:

$$P' = \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) - 2 \frac{28}{14} (2, 3, -1) = \left(\frac{9}{2}, 5, -1\right) - 4(2, 3, -1) = \left(-\frac{7}{2}, -7, 3\right).$$

3.2 Rectas perpendiculares y paralelas

La primera recta se escribe paramétricamente como

$$r: x = -1 + 2t, y = 1 + 3t, z = \alpha t,$$

con vector director $(v_r=2, 3, \alpha)$. La segunda recta (s) es la intersección de los planos $-x + y + z = 1$ y $x + 2y - z = 2$. Al sumarlos se obtiene $3y = 3$, es decir, $y = 1$; sustituyendo, $z = x$. Tomando $x = u$, su forma paramétrica y vector director son

$$s: x = u, y = 1, z = u, v_s = (1, 0, 1).$$

Valor de α para que sean perpendiculares. Dos rectas con vectores directores no nulos son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$v_r \cdot v_s = (2, 3, \alpha) \cdot (1, 0, 1) = 2 + \alpha = 0.$$

Por tanto, $\alpha = -2$.

Paralela a (s) por el punto de (r) con $z = 0$, para $\alpha \neq 0$. En la parametrización de (r), $z = \alpha t = 0$. Como $\alpha \neq 0$, necesariamente $t = 0$; el punto es $(-1, 1, 0)$. Una recta paralela a (s) debe tener el mismo vector director $(1, 0, 1)$. La respuesta, en forma paramétrica, es

$$x = -1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pregunta 4 · Análisis

4.1 Volumen máximo del prisma

La base del prisma es un triángulo equilátero de lado (x), y la altura del prisma es (h). Se pide expresar su volumen y elegir (x, h) para que sea máximo, sabiendo que el área total es 10 cm^2 .

El área lateral es perímetro de la base por altura, ($3xh$). El área de un triángulo equilátero es $\sqrt{3}x^2/4$, así que las dos bases suman $\sqrt{3}x^2/2$. La condición de área total es

$$3xh + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = 10.$$

Despejamos (h):

$$h = \frac{10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{3x}.$$

Las longitudes deben ser positivas: ($x > 0$), ($h > 0$), y por ello $0 < x < \sqrt{20/\sqrt{3}}$.

El volumen es área de la base por altura:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \left(\frac{10 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{3x} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{x^3}{8}. \end{aligned}$$

Buscamos los puntos críticos derivando e igualando a cero:

$$V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3x^2}{8} = 0 \implies x^2 = \frac{20\sqrt{3}}{9}.$$

Como ($x > 0$), el único valor admisible es

$$x = \frac{\sqrt{20\sqrt{3}}}{3} = \frac{2\sqrt{5}3^{1/4}}{3} \text{ cm.}$$

Para clasificarlo,

$$V''(x) = -\frac{3x}{4} < 0 \quad (x > 0),$$

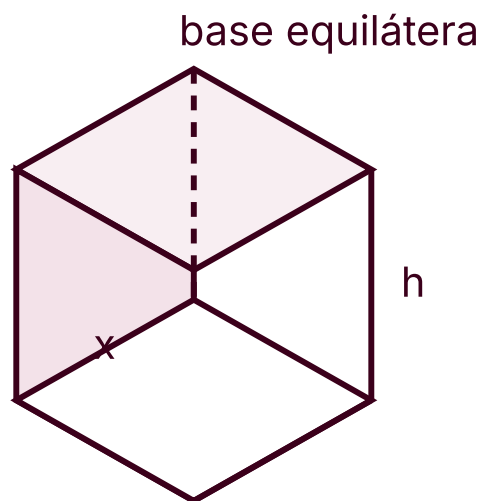
por lo que el volumen es máximo en ese punto. Al sustituir en la expresión de (h), o usar la condición crítica $h = x/\sqrt{3}$, resulta

$$h = \frac{23^{3/4}\sqrt{5}}{9} \text{ cm.}$$

El volumen máximo se puede calcular como $V = \sqrt{3}x^2h/4 = x^3/4$:

$$V_{\max} = \frac{103^{3/4}\sqrt{5}}{27} \text{ cm}^3.$$

La solución es físicamente posible porque ($x > 0$) y ($h > 0$); además, el volumen se anula en los extremos del intervalo admisible y el único punto crítico interior es un máximo.



4.2 Estudio de la función

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x.$$

Dominio. La función es racional y el denominador no puede ser cero. Resolvemos $((x-1)^2=0 \Rightarrow x=1)$; ese valor se excluye. Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Asíntotas. Para la posible asíntota vertical calculamos los límites al acercarnos al punto excluido. Como el cuadrado tiende a (0) por valores positivos,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty;$$

existe la asíntota vertical $x = 1$.

Para $x \rightarrow \pm\infty$, comprobamos si hay asíntota horizontal mediante el límite de (f): los términos (x) tienden a infinito, de modo que no hay horizontal. Buscamos una oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{(x-1)^2} = 0.$$

Luego la asíntota oblicua en ambos extremos es $y = x$.

Crecimiento, decrecimiento y extremos. Derivamos y resolvemos ($f'(x)=0$):

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3} = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}.$$

El factor $x^2 + 3$ es siempre positivo y el único punto crítico es $x = 3$. El punto $x = 1$ no pertenece al dominio, así que no es un extremo. Comprobamos el signo de la derivada en cada intervalo:

Intervalo Valor de prueba Signo de ($f'(x)$) Comportamiento

$(-\infty, 1)$	$x = 0$	+	Creciente
$(1, 3)$	$x = 2$	-	Decreciente
$(3, +\infty)$	$x = 4$	+	Creciente

En $x = 3$, el signo cambia de negativo a positivo; hay un mínimo relativo. Su ordenada es

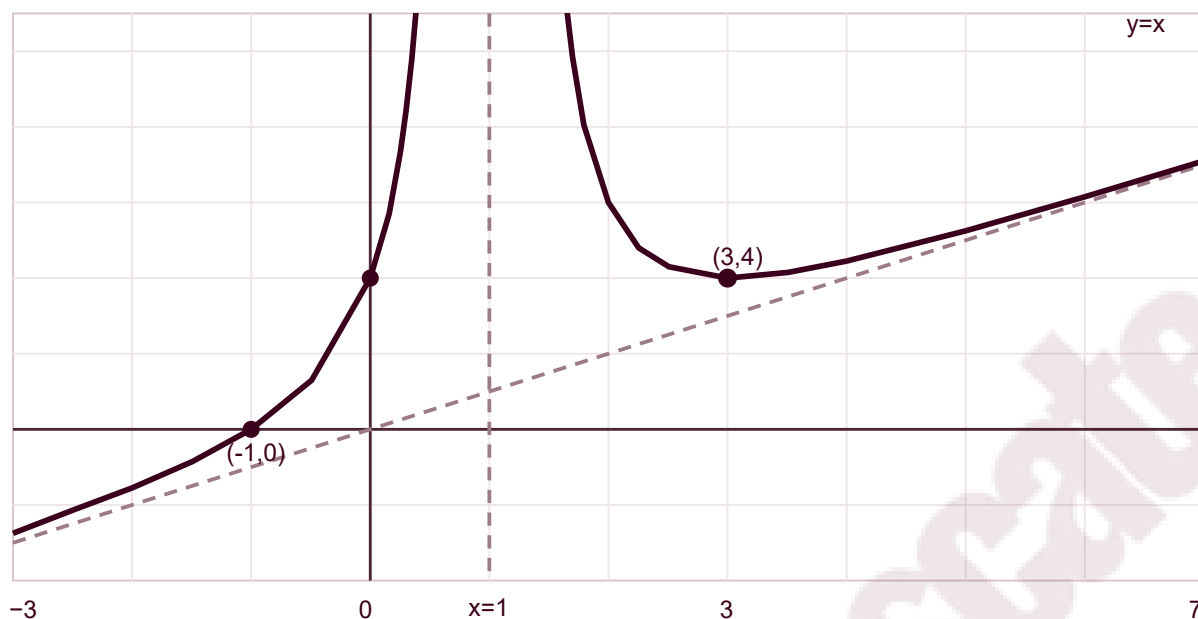
$$f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = 1 + 3 = 4,$$

así que el mínimo está en $(3, 4)$. No hay máximo relativo.

Puntos para representar la gráfica. La ordenada en el origen es ($f(0)=4$). Para los cortes con el eje (x), resolvemos ($f(x)=0$):

$$\frac{4}{(x-1)^2} + x = 0 \iff x(x-1)^2 + 4 = 0 \iff (x+1)(x^2 - 3x + 4) = 0.$$

El discriminante del segundo factor es $9 - 16 = -7 < 0$, así que el único corte real es $((-1,0))$. La gráfica se acerca a $x = 1$ hacia $+\infty$ por ambos lados y, cuando $x \rightarrow \pm\infty$, se aproxima a $y = x$.



Integral indefinida. Separamos la suma e integramos cada término. En el primer término usamos $u = x - 1$, por lo que $du = dx$:

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= 4 \int (x-1)^{-2} dx + \int x dx \\ &= 4 \left(-\frac{1}{x-1} \right) + \frac{x^2}{2} + C \\ &= \boxed{-\frac{4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C}, \quad x \neq 1.\end{aligned}$$