

Se resuelven ambas opciones; las condiciones de existencia se comprueban antes de operar con matrices.

Opción A - Ejercicio 1

Para $f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}$, la división de polinomios muestra que la pendiente de la asíntota oblicua es $-a$. Como debe valer -4 , obtenemos $a = 4$. Además, $f(2) = 3$:

$$\frac{4 \cdot 2^2 + b}{4 - 2} = 3 \implies 16 + b = 6 \implies b = -10.$$

Para el apartado (b), con $a = 2, b = 3$,

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{2 - x}, \quad f(1) = 5, \quad f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x + 3}{(2 - x)^2}, \quad f'(1) = 9.$$

La ecuación punto-pendiente de la tangente es

$$\boxed{y - 5 = 9(x - 1)} \quad (\text{es decir, } y = 9x - 4).$$

Opción A - Ejercicio 2

Usamos el cambio sugerido $t = \sqrt{x}$, de modo que $x = t^2$ y $dx = 2t dt$. Los límites pasan de $x = 0, \pi^2$ a $t = 0, \pi$:

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^{\pi} t \sin t dt.$$

Integramos por partes, con $u = t$ y $dv = \sin t dt$:

$$2[-t \cos t + \sin t]_0^{\pi} = 2\pi.$$

Por tanto, el valor de la integral es $\boxed{2\pi}$.

Opción A - Ejercicio 3

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante no se anula. Aquí

$$\det A = -(m-3)(m-1),$$

por lo que A es invertible para $m \neq 1, 3$. En particular, para $m = 0$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación es $XA - B^T = C$, así que $XA = C + B^T$ y, multiplicando por A^{-1} a la derecha,

$$X = (C + B^T)A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz obtenida tiene tamaño 2×3 , como debe tener X , y satisface la ecuación. Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Parametrizamos r como $(1+t, t, 1-t)$, con vector director $(1, 1, -1)$. Para s , los vectores normales de sus dos planos son $(1, -2, 0)$ y $(0, 1, 1)$; su producto vectorial da un director $(-2, -1, 1)$. Sustituyendo la parametrización de r en las ecuaciones de s se obtiene $t = 2$, luego se cortan en $P = (3, 2, -1)$.

$$\cos \theta = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (-2, -1, 1)|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Un normal al plano que contiene ambas rectas es el producto vectorial de sus directores:

$$(1, 1, -1) \times (-2, -1, 1) = (0, 1, 1).$$

Usando P , el plano es

$$y + z - 1 = 0.$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea $h(x) = e^x - e^{\sin x}$. En $x = 0$, $h(0) = 0$ y $h'(0) = 0$, así que aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)}{2} = 0.$$

Por tanto, el límite pedido es $\boxed{0}$.

Opción B - Ejercicio 2

Los puntos de corte satisfacen $5 - x = 4/x$, de donde $x^2 - 5x + 4 = 0$ y $x = 1, 4$. En $[1, 4]$ la recta queda por encima de la hipérbola; por ejemplo, en $x = 2$ sus valores son 3 y 2. El área es

$$\mathcal{A} = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln x \right]_1^4 = \boxed{\frac{15}{2} - 8 \ln 2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes es

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \det A_\lambda = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

El factor cuadrático es siempre positivo, pues $\lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1/2)^2 + 3/4$. Por tanto, solo puede anularse el determinante en $\lambda = -1$. Si $\lambda \neq -1$, el determinante no es cero y el sistema tiene solución única. Para $\lambda = -1$, la reducción de la matriz ampliada da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Así, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: es compatible indeterminado. Tomando $z = t$,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} - t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

El sistema tiene solución para todo λ real.

Opción B - Ejercicio 4

Un vector director de r es $(3, 0, -4)$, pues satisface las dos ecuaciones que definen la recta. Como PS debe ser perpendicular a r , escribimos $S = (x, 0, z)$ y usamos

$$(S - P) \cdot (3, 0, -4) = 0, \quad 4x + 3z = 33.$$

Es decir, $3(x - 2) - 4z = 0$ y $4x + 3z = 33$. Al resolver, $S = (6, 0, 3)$. Además,

$$\overrightarrow{PS} = (4, 0, 3), \quad \overrightarrow{PQ} = (-3, 12, 4), \quad \overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} = -12 + 12 = 0.$$

Por tanto, el triángulo también es rectángulo en P :

$$S = (6, 0, 3), \quad \triangle PQS \text{ es rectángulo en } P.$$