

Septiembre de 2006 · Convocatoria extraordinaria

El examen permite elegir el ejercicio A o el B y resolver tres de sus cuatro problemas. Aquí están desarrollados los ocho. En cada apartado se indica qué buscamos, se muestran los cálculos y se termina con una respuesta clara.

Ejercicio A · Problema 1

Qué se pide. Hallar cuándo el sistema homogéneo solo tiene la solución nula, resolver los casos indeterminados y describir los tres planos cuando $\lambda = -3$.

El sistema es

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y + z = 0, \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0, \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda + 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 & 0 \end{array} \right).$$

Desarrollamos $\det A$ por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= (\lambda + 2)((\lambda + 6)(\lambda - 2) + 15) + 3(\lambda + 3) - 5(\lambda + 3) \\ &= (\lambda + 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3) - 2(\lambda + 3) \\ &= (\lambda + 3)((\lambda + 2)(\lambda + 1) - 2) \\ &= \lambda(\lambda + 3)^2. \end{aligned}$$

Un sistema homogéneo tiene solo la solución nula si la matriz de coeficientes tiene rango 3, es decir, si su determinante no se anula. Por tanto, cuando $\lambda \neq 0, -3$,

$$\operatorname{rg}(A) = 3, \operatorname{rg}(A^*) = 3.$$

Por Rouché–Frobenius es un **sistema compatible determinado (SCD)**; al ser homogéneo, su única solución es

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ si } \lambda \neq 0, -3.$$

Caso $\lambda = 0$. Entonces $\det A = 0$. El menor de las dos primeras filas y columnas vale

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 3 = 15 \neq 0,$$

así que $\operatorname{rg}(A) = 2$. La columna ampliada es nula, luego $\operatorname{rg}(A^*) = \operatorname{rg}(A) = 2 < 3$. Rouché–Frobenius clasifica el sistema como **compatible indeterminado (SCI)**, con una variable libre.

Resolvemos las dos primeras ecuaciones. De $2x - y + z = 0$ resulta $y = 2x + z$. Al sustituirlo en $3x + 6y - 3z = 0$:

$$3x + 6(2x + z) - 3z = 0 \implies 15x + 3z = 0 \implies z = -5x, y = -3x.$$

La tercera ecuación es la suma de las dos primeras, por lo que queda satisfecha. Si $x = t$, obtenemos

$$(x, y, z) = t(1, -3, -5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso $\lambda = -3$. Las filas de A son

$$(-1, -1, 1), (3, 3, -3) = -3(-1, -1, 1), (5, 5, -5) = -5(-1, -1, 1).$$

Hay entradas no nulas, pero todas las filas son proporcionales; por tanto $\operatorname{rg}(A) = 1$. Como el sistema es homogéneo, $\operatorname{rg}(A^*) = 1 < 3$: vuelve a ser un **SCI**, ahora con dos parámetros libres. La ecuación independiente es $-x - y + z = 0$, es decir, $z = x + y$. Así,

$$(x, y, z) = (s, t, s + t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = -3$, las tres ecuaciones representan el mismo plano:

$$-x - y + z = 0, \quad 3x + 3y - 3z = 0, \quad 5x + 5y - 5z = 0.$$

Conclusión. Solo para $\lambda \neq 0, -3$ la solución es única y nula; en $\lambda = 0$ y $\lambda = -3$ hay infinitas soluciones. Cuando $\lambda = -3$, los tres planos coinciden.

Ejercicio A - Problema 2

Qué se pide. Escribir las dos rectas en forma paramétrica, probar que se cruzan y hallar la dirección y el punto de la perpendicular común.

a) Ecuaciones paramétricas

La recta r es la intersección de los planos

$$2x - 2y - z = 9, \quad 4x - y + z = 42.$$

Tomando $y = 0$, las ecuaciones dan $2x - z = 9$ y $4x + z = 42$. Al sumarlas, $6x = 51$, de donde $x = 17/2$ y $z = 8$. Un vector director se obtiene con el producto vectorial de los normales:

$$(2, -2, -1) \times (4, -1, 1) = (-3, -6, 6) \sim (-1, -2, 2).$$

Por tanto, exclusivamente en forma paramétrica,

$$r: \begin{cases} x = \frac{17}{2} - t, \\ y = -2t, \\ z = 8 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La recta s pasa por $S_0 = (1, 3, -4)$ y $S_1 = (3, -5, -2)$. Su dirección es

$$\overrightarrow{S_0S_1} = (3 - 1, -5 - 3, -2 + 4) = (2, -8, 2) \sim (1, -4, 1).$$

Así,

$$s: \begin{cases} x = 1 + u, \\ y = 3 - 4u, \\ z = -4 + u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

b) Posición relativa

Los vectores directores $(-1, -2, 2)$ y $(1, -4, 1)$ no son proporcionales. Por eso las rectas no son paralelas. Para comprobar si se cortan, igualamos sus coordenadas x y z :

$$\frac{17}{2} - t = 1 + u \implies t + u = \frac{15}{2}, \quad 8 + 2t = -4 + u \implies 2t - u = -12.$$

Estas dos ecuaciones dan $t = -3/2$, $u = 9$. Pero las coordenadas y serían, respectivamente,

$$-2t = 3, \quad 3 - 4u = 3 - 36 = -33,$$

que no coinciden. No hay intersección y tampoco son paralelas: **las rectas son cruzadas.**

c) Perpendicular común

Una dirección perpendicular a las dos rectas es el producto vectorial de sus direcciones:

$$(-1, -2, 2) \times (1, -4, 1) = (6, 3, 6) = 3(2, 1, 2).$$

Tomamos $\vec{v} = (2, 1, 2)$. Sean $R(t) \in r$ y $S(u) \in s$. Para que el segmento entre ellos sea perpendicular a ambas rectas, el vector $R(t) - S(u)$ debe tener producto escalar cero con sus dos direcciones:

$$R(t) - S(u) = \left(\frac{15}{2} - t - u, -3 - 2t + 4u, 12 + 2t - u \right).$$

Aplicando $(R - S) \cdot (-1, -2, 2) = 0$ y $(R - S) \cdot (1, -4, 1) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{45}{2} + 9t - 9u &= 0, \quad \frac{63}{2} + 9t - 18u = 0, \\ t - u &= -\frac{5}{2}, \quad t - 2u = -\frac{7}{2} \implies u = 1, \quad t = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

El punto pedido, que está en s , es

$$P = S(1) = (2, -1, -3).$$

El punto correspondiente de r es $Q = R(-3/2) = (10, 3, 5)$, y

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (8, 4, 8) = 4(2, 1, 2),$$

lo que comprueba que el segmento une las dos rectas y lleva la dirección perpendicular hallada. La recta perpendicular común queda, también en forma paramétrica,

$$t: \begin{cases} x = 2 + 2v, \\ y = -1 + v, \\ z = -3 + 2v, \end{cases} \quad v \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La dirección de la perpendicular común puede ser $(2, 1, 2)$, y corta a s en $P = (2, -1, -3)$.

Ejercicio A · Problema 3

Qué se pide. Hallar el máximo absoluto de f en $[-3, 0]$, el corte de f con g y el área encerrada entre ambas curvas y las rectas $x = -3$, $x = 0$.

Las funciones son

$$f(x) = x^3 - 3x + 8, \quad g(x) = -3x.$$

Como son polinómicas, su dominio es $\mathbb{R}$; aquí estudiamos el intervalo cerrado $[-3, 0]$. No hay asíntotas: son polinomios y, además, el tramo estudiado es acotado.

a) Máximo absoluto

Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1, 1.$$

Solo $x = -1$ pertenece a $[-3, 0]$. Comprobamos el signo con valores de prueba:

Intervalo	Prueba en f'	Signo	Comportamiento
$(-3, -1)$	$x = -2 : 9$	+	Crece
$(-1, 0)$	$x = -\frac{1}{2} : -\frac{9}{4}$	-	Decrece

El cambio de $+$ a $-$ da un máximo en $x = -1$. Comparamos también los extremos del intervalo:

$$f(-3) = -27 + 9 + 8 = -10, \quad f(-1) = -1 + 3 + 8 = 10, \quad f(0) = 8.$$

Por tanto, el máximo absoluto es 10, alcanzado en $(-1, 10)$.

b) Punto de corte

Igualemos las expresiones de las funciones:

$$x^3 - 3x + 8 = -3x \implies x^3 + 8 = 0 \implies x = -2.$$

La ordenada es $g(-2) = -3(-2) = 6$. **Conclusión.** El único corte es el punto $(-2, 6)$.

c) Área entre las curvas

La diferencia entre las funciones es

$$f(x) - g(x) = x^3 + 8.$$

Se anula en $x = -2$, es negativa en $[-3, -2)$ y positiva en $(-2, 0]$. Por eso g queda arriba a la izquierda del corte y f queda arriba a la derecha:

Tramo	Signo de $f - g$	Función superior
$[-3, -2)$	$-$	g
$(-2, 0]$	$+$	f

El área se calcula integrando "superior menos inferior" en cada tramo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-3}^{-2} (g(x) - f(x)) dx + \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (-x^3 - 8) dx + \int_{-2}^0 (x^3 + 8) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - 8x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^0 \\ &= \left(12 - \frac{15}{4} \right) + (0 - (-12)) \\ &= \frac{33}{4} + 12 = \frac{81}{4}. \end{aligned}$$

Conclusión. El recinto tiene área $\mathcal{A} = 81/4 \text{ u}^2$.

Ejercicio A · Problema 4

Qué se pide. Expresar el área quemada según el tiempo y calcular la rapidez a la que crece cuando el radio vale 45 m.

Sea t el tiempo en minutos desde que comienza el incendio, $r(t)$ el radio en metros y $A(t)$ el área en metros cuadrados. El radio parte de cero y aumenta a $1,8 \text{ m/min} = 9/5 \text{ m/min}$:

$$r(t) = \frac{9}{5}t.$$

La fórmula del área de un círculo es $A = \pi r^2$. Al sustituir el radio:

$$A(t) = \pi \left(\frac{9}{5}t \right)^2 = \frac{81\pi}{25}t^2 \text{ m}^2.$$

Derivamos respecto al tiempo para obtener la velocidad de crecimiento del área:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{162\pi}{25}t \text{ m}^2/\text{min}.$$

Cuando $r = 45 \text{ m}$,

$$\frac{9}{5}t = 45 \implies t = 25 \text{ min}.$$

Sustituimos ese instante en la derivada:

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=25} = \frac{162\pi}{25} \cdot 25 = 162\pi \text{ m}^2/\text{min} \approx 508,94 \text{ m}^2/\text{min}.$$

Conclusión. A los 25 minutos, cuando el radio alcanza 45 m, el área aumenta a $162\pi \approx 508,94 \text{ m}^2/\text{min}$.

Ejercicio B · Problema 1

Qué se pide. Calcular $\det(A^3)$ y $(A^3)^{-1}$, resolver $XA^3 = BA^2$ y hallar A^{-1} . El enunciado proporciona:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = (1 \quad 2 \quad 3).$$

a) Determinante e inversa de A^3

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(A^3) &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(3) + 2(-4 + 2) = -1. \end{aligned}$$

Como $\det(A^3) = -1 \neq 0$, la matriz es invertible. Su matriz de cofactores y su adjunta son

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 4 & -7 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{adj}(A^3) = C^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usamos $M^{-1} = \text{adj}(M) / \det M$:

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{-1} \text{adj}(A^3) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Matriz fila X

Partimos de $XA^3 = BA^2$. Multiplicamos por $(A^3)^{-1}$ a la derecha:

$$X = BA^2(A^3)^{-1}.$$

Primero hacemos el producto BA^2 :

$$BA^2 = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-3 \quad -2 \quad 4).$$

Ahora multiplicamos esa fila por la inversa ya calculada:

$$\begin{aligned} X &= (-3 \quad -2 \quad 4) \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (9 - 12 + 8 \quad 12 - 14 + 8 \quad 6 - 8 + 4) = (5 \quad 6 \quad 2). \end{aligned}$$

Por tanto, $X = (5, 6, 2)$.

c) Inversa de A

Como A^3 es invertible, A también lo es. De $A^3 = AA^2$, multiplicando por A^{-1} a la izquierda y por $(A^3)^{-1}$ a la derecha:

$$A^{-1} = A^2(A^3)^{-1}.$$

Calculamos el producto, sin cambiar el orden de los factores:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejercicio B · Problema 2

Qué se pide. Dar la recta en forma paramétrica y el plano en forma general, hallar su intersección y ángulo, y localizar los puntos de la recta a distancia 3 del plano.

a) Recta y plano

El plano π pasa por

$$A = (11, 1, 2), B = (5, 7, 5), C = (7, -1, -2).$$

Dos vectores del plano son

$$\overrightarrow{AB} = (-6, 6, 3), \overrightarrow{AC} = (-4, -2, -4).$$

Su producto vectorial da un vector normal:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-18, -36, 36) = -18(1, 2, -2).$$

Tomamos $\vec{n} = (1, 2, -2)$. La forma general de un plano es $x + 2y - 2z + d = 0$; al sustituir el punto A ,

$$11 + 2(1) - 2(2) + d = 0 \implies d = -9.$$

Así,

$$\boxed{\pi: x + 2y - 2z - 9 = 0}.$$

La recta r es la intersección de $x + y + z = 15$ y $2x - 7y + 2z = 3$. Duplicamos la primera ecuación y restamos la segunda:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 30, & (2x + 2y + 2z) - (2x - 7y + 2z) &= 30 - 3, \\ 9y &= 27 \implies y &= 3. \end{aligned}$$

La primera ecuación da $x + z = 12$. Tomando $x = t$, la recta queda en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = 3, \\ z = 12 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Intersección y ángulo

Para el punto de intersección, sustituimos $(t, 3, 12 - t)$ en la ecuación de π :

$$t + 2(3) - 2(12 - t) - 9 = 0 \implies 3t - 27 = 0 \implies t = 9.$$

Por tanto,

$$P = (9, 3, 3).$$

El vector director de r es $\vec{d} = (1, 0, -1)$ y un normal de π es $\vec{n} = (1, 2, -2)$. Si α es el ángulo agudo entre la recta y el plano, usamos

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}\|}.$$

Sustituimos producto escalar y normas:

$$\sin \alpha = \frac{|1 + 2|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \alpha = 45^\circ.$$

c) Puntos a distancia 3 del plano

La distancia de $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$ es

$$d(X_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Para un punto de r , $R(t) = (t, 3, 12 - t)$, resulta

$$d(R(t), \pi) = \frac{|t + 6 - 2(12 - t) - 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|3t - 27|}{3} = |t - 9|.$$

Imponemos que la distancia valga 3:

$$|t - 9| = 3 \implies t = 6 \text{ o } t = 12.$$

Al sustituir en la parametrización de r :

$$M = (6, 3, 6), N = (12, 3, 0).$$

Ejercicio B · Problema 3

Qué se pide. Derivar $f(x) = ax + b + \sin x$, hallar a, b con las condiciones de tangencia y justificar y calcular los ceros de $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x$ en $[0, \pi]$.

a) Derivada y condiciones en el origen

Derivando término a término, $f'(x) = a + \cos x$. Para que $O = (0, 0)$ pertenezca a la curva, imponemos $f(0) = 0$: $0 = a \cdot 0 + b + \sin 0$, de donde $b = 0$. El eje OX tiene pendiente 0, así que la tangente en el origen debe cumplir $f'(0) = a + \cos 0 = 0$; por tanto, $a = -1$. **Conclusión:** $a = -1$, $b = 0$, y la función queda $f(x) = -x + \sin x$.

b) Justificación de los ceros

La función es $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x$. Sus dos ceros se comprueban exactamente: $g(0) = 0$ y $g(\pi/2) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin(\pi/2) = -1 + 1 = 0$. Para comprobar que no hay otros ceros, estudiamos su curvatura:

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}, \quad g''(x) = -\sin x < 0 \quad (0 < x < \pi).$$

Así, g' es decreciente. Como $g'(\pi/2) = -2/\pi < 0$, g decrece estrictamente desde $\pi/2$ hasta π ; no puede volver a cortar el eje allí. Entre 0 y $\pi/2$, la concavidad estricta y los valores nulos en los extremos hacen que $g(x) > 0$. Por tanto, los únicos ceros del intervalo son 0 y $\pi/2$.

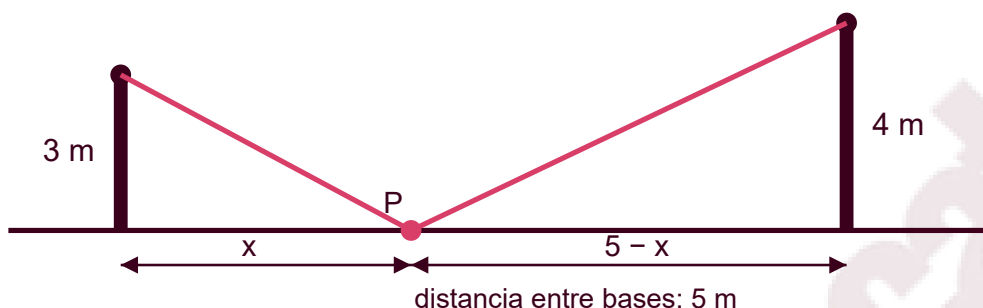
c) Puntos donde se anula

Conclusión. Los únicos ceros son $x = 0$ y $x = \pi/2$; en la gráfica $y = g(x)$ corresponden a $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

Ejercicio B · Problema 4

Qué se pide. Escribir la longitud total de cable como función de x , demostrar que su mínimo ocurre cuando las pendientes tienen el mismo valor absoluto y calcular esa longitud mínima.

El poste bajo mide 3 m y el alto 4 m; sus bases están separadas 5 m. Medimos x desde la base del poste bajo hasta P , así que $0 \leq x \leq 5$. Cada cable es la hipotenusa de un triángulo rectángulo:



Por Pitágoras, las longitudes de los cables son

$$l_1(x) = \sqrt{x^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 9}, \quad l_2(x) = \sqrt{(5-x)^2 + 4^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 16}.$$

El cable total es la suma de esas longitudes, así que $f(x) = l_1(x) + l_2(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(5-x)^2 + 16}$, con dominio $[0, 5]$. Las raíces son continuas en ese intervalo y no hay puntos singulares ni límites infinitos; por tanto, no existen asíntotas.

Derivamos para localizar el mínimo:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{5-x}{\sqrt{(5-x)^2 + 16}}.$$

En el interior, igualamos la derivada a cero. Ambos miembros son positivos, así que podemos elevar al cuadrado sin cambiar la igualdad:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{5-x}{\sqrt{(5-x)^2 + 16}} \\ &\iff x^2((5-x)^2 + 16) = (5-x)^2(x^2 + 9) \\ &\iff 16x^2 = 9(5-x)^2. \end{aligned}$$

Como $0 < x < 5$, tomamos raíces positivas: $4x = 3(5-x)$, de donde $x = 15/7$.

La pendiente es "cambio vertical dividido entre cambio horizontal"; por eso $|m_1| = 3/x$ y $|m_2| = 4/(5-x)$.

Igualarlas da $3/x = 4/(5-x)$, es decir, $4x = 3(5-x)$: la condición del enunciado coincide con la condición crítica de f .

Comprobamos que es un mínimo global: $f''(x) = \frac{9}{(x^2+9)^{3/2}} + \frac{16}{((5-x)^2+16)^{3/2}} > 0$ para $0 < x < 5$. Como $f''(x) > 0$, la derivada es estrictamente creciente. Al anularse en $x = 15/7$, pasa de negativa a positiva; por tanto, f decrece hasta ese punto y crece después. Es el único mínimo global.

En $x = 15/7$, calculamos las longitudes y las sumamos:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\frac{225}{49} + 9} = \frac{3\sqrt{74}}{7}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{400}{49} + 16} = \frac{4\sqrt{74}}{7}, \\ f_{\min} &= l_1 + l_2 = \frac{3\sqrt{74}}{7} + \frac{4\sqrt{74}}{7} = \sqrt{74} \text{ m} \approx 8,60 \text{ m}. \end{aligned}$$

Conclusión. El mínimo único se alcanza en $x = 15/7$ m, cuando las pendientes tienen igual valor absoluto, y la longitud es $\sqrt{74}$ m.