

PAU Madrid - Matemáticas II

Modelo orientativo de 2025

Se desarrollan todas las alternativas del examen. En la prueba basta con contestar a las opciones que se elijan.

Pregunta 1 - Álgebra

1.1 a) Invertibilidad de AB

Multiplicamos A por B para obtener la matriz cuadrada cuya invertibilidad se pregunta:

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante es distinto de cero. En este caso,

$$\det(AB) = 2\lambda \cdot 0 - (-1)(-1) = -1 \neq 0,$$

independientemente del valor de λ . **Conclusión.** La matriz AB tiene inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; no existe ningún valor que la haga singular.

1.1 b) Rango de BA

Calculamos el producto, teniendo en cuenta que ahora se obtiene una matriz 3×3 :

$$BA = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

La tercera fila es la primera más 2λ veces la segunda, así que las tres filas son linealmente dependientes y $\text{rg}(BA) \leq 2$. Para probar que el rango no baja de 2, consideramos el menor formado por las dos primeras filas y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 > 0.$$

Este menor es no nulo para todo valor real de λ , por lo que $\text{rg}(BA) \geq 2$. **Conclusión.** $\text{rg}(BA) = 2$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.1 c) Discusión del sistema según a

Para $\lambda = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes y la ampliada del sistema son

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}.$$

Como $\det M = 0$ y el menor superior izquierdo de orden dos vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

tenemos $\text{rg}(M) = 2$. Además, la primera fila de M es la semisuma de las otras dos. Para que esa misma relación se cumpla en la matriz ampliada, los términos independientes deben verificar

$$a^2 = \frac{a^2 + 2a}{2} \iff a(a - 2) = 0.$$

Si $a \neq 0, 2$, esa dependencia entre las filas deja de cumplirse en M^* ; por ejemplo, el menor ampliado formado por las columnas primera, segunda y cuarta es $2a - a^2 \neq 0$. Así, $\text{rg}(M^*) = 3$. Si $a = 0$ o $a = 2$, se conserva la dependencia de filas y ambos rangos valen 2.

Aplicamos Rouché-Frobenius y comparamos los rangos con las tres incógnitas:

a	$\text{rg}(M)$	$\text{rg}(M^*)$	Clasificación
$a = 0$ o $a = 2$	2	$2 < 3$	SCI
$a \neq 0, 2$	2	3	SI

Cuando $a = 0$, las ecuaciones dan $y = z$ y $x = -2y$, por lo que

$$(x, y, z) = (-2t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cuando $a = 2$, se obtiene $y = z$ y $x = 4 - 2y$, de modo que

$$(x, y, z) = (4 - 2t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. Para $a = 0$ y $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado; para cualquier otro valor de a es incompatible.

1.2) Capacidades de las garrafas y del aljibe

Sean p , m y g las capacidades, en litros, de las garrafas pequeña, mediana y grande. Traducimos cada condición en una igualdad:

$$\begin{cases} 6p + 2 = m + g, \\ 2g = 2m + p + 1, \\ 14p + 6m = 5m + 5g. \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos $g = 6p + 2 - m$. Al sustituirlo en la segunda,

$$2(6p + 2 - m) = 2m + p + 1 \implies 4m = 11p + 3 \implies m = \frac{11p + 3}{4}.$$

La tercera ecuación equivale a $14p + m = 5g$. Sustituimos de nuevo $g = 6p + 2 - m$:

$$14p + m = 5(6p + 2 - m) \implies 3m = 8p + 5 \implies m = \frac{8p + 5}{3}.$$

Igualamos las dos expresiones de m :

$$\frac{11p + 3}{4} = \frac{8p + 5}{3} \implies 33p + 9 = 32p + 20 \implies p = 11.$$

Entonces $m = 31$ y, usando la primera ecuación, $g = 6 \cdot 11 + 2 - 31 = 37$. La capacidad del aljibe es

$$V = 14p + 6m = 14 \cdot 11 + 6 \cdot 31 = 340 \text{ L}.$$

Conclusión. Las capacidades son 11 L, 31 L y 37 L; el aljibe tiene una capacidad de 340 L.

Pregunta 2 - Análisis e integración

2.1 a) Continuidad en $\mathbb{R}$

Para $x < 2$ la función es polinómica. Para $x \geq 2$ aparece $\sqrt{5x-1}$, cuyo radicando es positivo en ese tramo porque $5x-1 \geq 9$. Por tanto, ambas expresiones están definidas y son continuas en sus respectivos intervalos; solo hay que comprobar el punto de unión $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 4 - 12 + 11 = 3, \quad f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3.$$

El límite por la derecha también vale 3, pues la segunda expresión es continua en $x = 2$. Los dos límites laterales coinciden con el valor de la función. **Conclusión.** f es continua en todo $\mathbb{R}$.

2.1 b) Extremos relativos en $(1, 3)$

Estudiamos el signo de la derivada en cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x < 2, \\ \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}, & x > 2. \end{cases}$$

Si $1 < x < 2$, entonces $2x - 6 < 0$ y f decrece. Si $2 < x < 3$, la derivada es positiva y f crece. En $x = 2$, las derivadas laterales son -2 y $5/6$, por lo que la función no es derivable allí; sin embargo, pasa de decrecer a crecer. Además, $f(2) = 3$. **Conclusión.** En $(1, 3)$ hay un mínimo relativo en $(2, 3)$ y no hay máximo relativo.

2.1 c) Área entre la gráfica y el eje OX

En $[1, 2]$, $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 > 0$; en $[2, 3]$, $\sqrt{5x - 1} > 0$. Por tanto, el área se calcula integrando la expresión correspondiente en cada tramo:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (x^2 - 6x + 11) dx + \int_2^3 \sqrt{5x - 1} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x \right]_1^2 + \left[\frac{2(5x - 1)^{3/2}}{15} \right]_2^3 \\ &= \frac{13}{3} + \frac{28\sqrt{14} - 54}{15} \\ &= \frac{11 + 28\sqrt{14}}{15}. \end{aligned}$$

En la segunda integral se ha usado la sustitución $u = 5x - 1$, $du = 5 dx$. **Conclusión.** El área encerrada es $\frac{11 + 28\sqrt{14}}{15}$ unidades cuadradas.

2.2 a) Paridad de $g(x) = f(xf(x))$

La función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ es impar, pues $f(-x) = -f(x)$. Al cambiar x por $-x$ en el argumento de f ,

$$(-x)f(-x) = (-x)(-f(x)) = xf(x).$$

Por consiguiente,

$$g(-x) = f((-x)f(-x)) = f(xf(x)) = g(x).$$

Conclusión. g es una función par.

2.2 b) Límite en $x = 0$

Racionalizamos la diferencia de raíces para convertirla en un cociente que contenga $f(x)/x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 3f(x)} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x)}{x(\sqrt{4 + 3f(x)} + 2)} \\ &= \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Como $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}x} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusión. El límite vale $\frac{3\pi}{8}$.

2.2 c) Integral definida

Integramos por partes usando $u = x$ y $dv = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$. Si $c = \pi/2$, entonces $v = -\cos(cx)/c$ y

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= \left[-\frac{x \cos(cx)}{c} + \frac{\sin(cx)}{c^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{c^2} = \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Conclusión. $\int_0^1 xf(x) dx = \frac{4}{\pi^2}$.

Pregunta 3 - Geometría en el espacio

3.1 a) Plano respecto del cual A y B son simétricos

Si dos puntos son simétricos respecto a un plano, el segmento que los une es perpendicular al plano y su punto medio pertenece a él. Aquí,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1 - 0, 1 - 0, 1 - 0) = (1, 1, 1), \quad M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Así, $\overrightarrow{AB}$ es un vector normal del plano buscado y M es un punto de ese plano. Su ecuación es

$$(x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) + (z - \frac{1}{2}) = 0.$$

Conclusión. El plano de simetría es $2x + 2y + 2z - 3 = 0$.

3.1 b) Plano que contiene a r y pasa por B

La recta r pasa por $P_0 = (0, 0, 1)$ y tiene vector director $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Otro vector del plano se obtiene uniendo P_0 con B :

$$\overrightarrow{P_0B} = B - P_0 = (1 - 0, 1 - 0, 1 - 1) = (1, 1, 0).$$

El producto vectorial de estos dos vectores da un normal al plano, porque es perpendicular a ambos:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{P_0B} = (-1, 1, 0).$$

Usando P_0 en la ecuación punto-normal,

$$-(x - 0) + (y - 0) = 0.$$

Conclusión. Una ecuación del plano es $-x + y = 0$.

3.1 c) Recta paralela a r que pasa por A

Una recta paralela a r debe compartir su vector director $(1, 1, 1)$. Al pasar por $A = (0, 0, 0)$, su forma paramétrica es

$$s : \begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La recta pedida es s en la forma paramétrica anterior.

3.2 a) Ángulos e intersección de los tres planos

Los vectores normales de los planos son

$$\vec{n}_1 = (-2, -2, 1), \quad \vec{n}_2 = (-2, 1, -2), \quad \vec{n}_3 = (1, -2, -2).$$

El ángulo entre dos planos es el ángulo agudo entre sus normales, para el que

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j|}{\|\vec{n}_i\| \|\vec{n}_j\|}.$$

Cada normal tiene módulo 3, y los productos escalares son

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0, \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0, \quad \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0.$$

Por tanto, cada pareja de planos es perpendicular. Para hallar la intersección común resolvemos el sistema homogéneo asociado a las tres ecuaciones. La matriz de sus normales tiene determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

así que el sistema solo tiene la solución trivial. **Conclusión.** Los planos son perpendiculares dos a dos y su único punto común es $(0, 0, 0)$.

3.2 b) Reconstrucción de P y proyección sobre π_3

Si Q_i es la proyección ortogonal de P sobre π_i , el vector $P - Q_i$ es paralelo al normal $\vec{n}_i$. Escribimos

$$P = Q_1 + \alpha \vec{n}_1 = Q_2 + \beta \vec{n}_2.$$

Restando los puntos conocidos,

$$Q_2 - Q_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \alpha \vec{n}_1 - \beta \vec{n}_2.$$

Los normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son perpendiculares y sus módulos al cuadrado valen 9. Al hacer el producto escalar con cada normal obtenemos

$$(Q_2 - Q_1) \cdot \vec{n}_1 = -3 = 9\alpha \implies \alpha = -\frac{1}{3},$$

$$(Q_2 - Q_1) \cdot \vec{n}_2 = 6 = -9\beta \implies \beta = -\frac{2}{3}.$$

Así,

$$P = Q_1 - \frac{1}{3}\vec{n}_1 = (1, 2, 3).$$

La proyección ortogonal de P sobre el plano π_3 , que pasa por el origen, se calcula restando su componente en la dirección normal:

$$Q_3 = P - \frac{P \cdot \vec{n}_3}{\|\vec{n}_3\|^2} \vec{n}_3 = (1, 2, 3) - \frac{-9}{9}(1, -2, -2) = (2, 0, 1).$$

Conclusión. El punto es $P = (1, 2, 3)$ y su proyección sobre π_3 es $Q_3 = (2, 0, 1)$.

Pregunta 4 - Probabilidad

La probabilidad de que una persona mayor de 65 años esté vacunada es $p = 0,732$; la de que no lo esté es $q = 1 - p = 0,268$.

a) Reuniones de 5 y 7 personas

Sea X el número de asistentes no vacunados en una reunión de n personas. Si los asistentes constituyen una muestra aleatoria, los estados de vacunación se modelizan como ensayos independientes con probabilidad constante q . Por tanto, $X \sim \text{Binomial}(n, 0,268)$. La restricción se aplica si hay más de 0,5 de probabilidad de que haya más de una persona no vacunada:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - (0,732)^n - n(0,268)(0,732)^{n-1}. \end{aligned}$$

Para una reunión de cinco personas,

$$P(X > 1) = 1 - (0,732)^5 - 5(0,268)(0,732)^4 \approx 0,4051 < 0,5.$$

Para siete personas,

$$P(X > 1) = 1 - (0,732)^7 - 7(0,268)(0,732)^6 \approx 0,5988 > 0,5.$$

Conclusión. No se restringen las reuniones de cinco personas; sí se restringen las de siete.

b) Al menos 350 personas vacunadas en una muestra de 500

Sea Y el número de personas vacunadas. Entonces $Y \sim \text{Binomial}(500, 0,732)$. Como $np = 366$ y $nq = 134$ son grandes, aproximamos la binomial mediante una normal con

$$\mu = np = 366, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,732 \cdot 0,268} = \sqrt{98,088} \approx 9,904.$$

Aplicamos la corrección de continuidad: el suceso $Y \geq 350$ se aproxima por $N \geq 349,5$. Al tipificar,

$$\begin{aligned} P(Y \geq 350) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{349,5 - 366}{9,904}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(-1,67) = \Phi(1,67) \\ &\approx 0,9525. \end{aligned}$$

Conclusión. La probabilidad aproximada de que al menos 350 personas estén vacunadas es 0,9525, es decir, un 95,25 %.