

CATALUÑA · PAU 2011 · ORDINARIA

Matemáticas II

12 ejercicios

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se pueden usar calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Dada la recta $r : \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$

a) 1 punto

Encuentre un vector director.

b) 1 punto

Calcule la ecuación continua de la recta paralela a r que pasa por el punto $P = (1, 0, -1)$.

Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Calcule el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $f(x) = x^2 - x + 2$ y $g(x) = 5 - 3x$.

Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Si tenemos la matriz invertible A y la ecuación matricial $X \cdot A + B = C$:

a) 1 punto

Aíse la matriz X .

b) 1 punto

Encuentre la matriz X cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

Dado el plano $\pi : 2x + y - z = 5$:

a) 1 punto

Calcule la ecuación del plano paralelo al plano π que pasa por el punto $P = (1, 0, -1)$.

b) 1 punto

Determine también la distancia entre el punto P y el plano π .

Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Definimos las funciones $f(x) = a(1 - x^2)$ y $g(x) = \frac{x^2-1}{a}$ en las que $a > 0$.

a) 1 punto

Compruebe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones es:

$$\frac{4(1+a^2)}{3a}$$

b) 1 punto

Calcule el valor del parámetro a para que esta área sea mínima.

Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

La gráfica correspondiente a la derivada de una función $f(x)$ es la siguiente:

a) 1,5 puntos

Explique razonadamente qué valores de x corresponden a máximos o a mínimos relativos de $f(x)$.

b) 0,5 puntos

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Considere el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y - az = -3 \\ 2x + (a-5)y + z = 4a + 2 \\ 4x + (a-1)y - 3z = 4 \end{cases}$$

a) 1 punto

Calcule los valores del parámetro a para que el sistema no sea compatible determinado.

b) 1 punto

¿Hay algún valor de a para el cual $x = 1, y = -3, z = -1$ sea la única solución del sistema?

Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Analice, según los valores del parámetro k , el carácter (es decir, si es compatible o no y si es determinado o no) del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = k - 4 \\ (k-6)y + 3z = 0 \\ (k+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Sean $r_1 : x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{1-z}{2}$ y $r_2 : \frac{x+3}{2} = y + 1 = \frac{z+1}{2}$.

a) 1 punto

Compruebe que r_1 y r_2 son perpendiculares.

b) 1 punto

Compruebe que se cortan mediante la determinación del punto de corte.

Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Calcule la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) de los planos que contienen la recta $r : \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ y que forman un ángulo de 45° con el plano $z = 0$.

Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Sea $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ cuando $a \neq 0$.

a) 1 punto

Calcule el valor de a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) 1 punto

Cuando $a = 2$, clasifique sus extremos relativos.

Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Dentro de un triángulo rectángulo, de catetos 3 y 4 cm, hay un rectángulo. Dos lados del rectángulo están situados en los catetos del triángulo y uno de los vértices del rectángulo está en la hipotenusa del triángulo.

a) 0,5 puntos

Haga un esbozo de la situación descrita.

b) 0,5 puntos

Si x es la longitud del lado del rectángulo que está situado en el cateto pequeño e y es el otro lado del rectángulo, compruebe que se cumple que $4x + 3y = 12$.

c) 1 punto

Determine las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima.