

Septiembre de 2004 · Convocatoria extraordinaria

Desarrollamos los problemas del enunciado paso a paso. En el examen se elige uno de los dos ejercicios y, dentro de él, tres problemas; los problemas 4.1 y 4.2 no se pueden elegir a la vez.

Ejercicio A · Problema 1

Se buscan las matrices X que cumplen $AX = XA$. Escribimos las matrices y efectuamos los dos productos por separado:

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
$$AX = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + 4z & 3y + 4t \end{pmatrix}, XA = \begin{pmatrix} x + 3y & 2x + 4y \\ z + 3t & 2z + 4t \end{pmatrix}.$$

Igualamos las cuatro posiciones correspondientes:

$$\begin{cases} x + 2z = x + 3y, \\ y + 2t = 2x + 4y, \\ 3x + 4z = z + 3t, \\ 3y + 4t = 2z + 4t. \end{cases}$$

La primera y la cuarta ecuación dan la misma condición, $2z = 3y$. La tercera da $t = x + z$. La segunda es entonces equivalente a esas dos condiciones. Por tanto, hay dos parámetros libres. Tomamos $x = s$ e $y = 2r$; así $z = 3r$ y $t = s + 3r$.

Conclusión: todos los pares de números reales r, s producen una solución, y no hay otras:

$$X = \begin{pmatrix} s & 2r \\ 3r & s + 3r \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio A · Problema 2

La recta del enunciado pasa por $Q = (1, 2, 0)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, -2, 1)$. La escribimos en la forma paramétrica pedida:

$$r : \begin{cases} x = 1 + u, \\ y = 2 - 2u, \\ z = u, \end{cases} u \in \mathbb{R}.$$

Se pide el plano por $P = (-2, 4, -3)$ perpendicular a la recta y la distancia de P a ella.

a) Plano perpendicular a la recta

Si un plano es perpendicular a una recta, el vector director de la recta es normal al plano. Por eso usamos $\vec{n} = (1, -2, 1)$. La ecuación general de un plano con normal (a, b, c) por $P = (x_0, y_0, z_0)$ es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Sustituimos los datos:

$$(x + 2) - 2(y - 4) + (z + 3) = 0 \implies \boxed{\pi : x - 2y + z + 13 = 0}.$$

El punto P satisface la ecuación y la normal del plano es paralela al director de r , como se requería.

b) Distancia del punto a la recta

Para un punto P y una recta que pasa por Q con director $\vec{v}$, usamos

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Calculamos cada vector:

$$\vec{QP} = P - Q = (-3, 2, -3), \quad \vec{v} = (1, -2, 1).$$

$$\vec{QP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-4, 0, 4).$$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}}.$$

Conclusión: el plano es $x - 2y + z + 13 = 0$ y la distancia de P a r es $4/\sqrt{3}$ unidades.

Ejercicio A - Problema 3

La función $f(x) = x^2 + mx$ es polinómica, así que su dominio es $\mathbb{R}$. Se pide elegir m para que tenga un mínimo en $x = -3/4$ y calcular después el área entre f y su derivada.

a) Valor del parámetro

En un mínimo interior, la derivada se anula; además, una segunda derivada positiva confirma que se trata de un mínimo:

$$f'(x) = 2x + m, \quad f''(x) = 2.$$

Imponemos $f'(-3/4) = 0$:

$$2\left(-\frac{3}{4}\right) + m = 0 \implies -\frac{3}{2} + m = 0 \implies m = \frac{3}{2}.$$

Como $f''(x) = 2 > 0$ para todo real, ese punto crítico sí es un mínimo. Comprobamos también el signo de la derivada a cada lado, sustituyendo valores de prueba:

Intervalo	Prueba	Sustitución en f'	Signo y comportamiento
$x < -\frac{3}{4}$	$x = -1$	$f'(-1) = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$	$-$: decrece
$x = -\frac{3}{4}$		$f'(-\frac{3}{4}) = 0$	mínimo
$x > -\frac{3}{4}$	$x = -\frac{1}{2}$	$f'(-\frac{1}{2}) = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$	$+$: crece

Conclusión: el parámetro pedido es $\boxed{m = 3/2}$.

Comprobación de asíntotas de f

El dominio de f es todo $\mathbb{R}$, porque es un polinomio; por tanto, no hay puntos del dominio que puedan producir asíntotas verticales. Además,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty,$$

así que no hay asíntotas horizontales. Para que hubiera una asíntota oblicua, tendría que existir una pendiente finita $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$. Pero

$$\frac{f(x)}{x} = x + \frac{3}{2},$$

que no tiene límite finito en ninguno de los dos extremos. **Por tanto, f no tiene asíntotas.**

b) Área entre la parábola y su recta derivada

Con $m = 3/2$:

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x, \quad f'(x) = 2x + \frac{3}{2}.$$

Primero hallamos los puntos de corte, igualando las dos funciones:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \implies x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \implies (x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Los límites de integración son $x = -1$ y $x = 3/2$. En ese intervalo la recta queda por encima de la parábola, pues su diferencia es

$$f'(x) - f(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} > 0 \text{ para } -1 < x < \frac{3}{2}.$$

El área entre dos curvas es la integral de «función superior menos función inferior»:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3/2} (f'(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_{-1}^{3/2} \\ &= \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{125}{48}}. \end{aligned}$$

Conclusión: el área encerrada es $125/48$ unidades cuadradas.

Ejercicio A · Problema 4.1

a) Cultivo que duplica cada día

Partimos de 10 bacterias en el instante inicial. Si cada día se duplica la cantidad, tras d días hay $N(d) = 10 \cdot 2^d$ bacterias:

$$N(10) = 10 \cdot 2^{10} = 10 \cdot 1024 = \boxed{10240 \text{ bacterias}}.$$

b) Segundo cultivo

Ahora $P(t)$ es la cantidad de bacterias tras t días y se sabe que $P'(t)$ es constante entre los días 0 y 10. La tasa constante es la pendiente entre los datos conocidos:

$$P'(t) = k = \frac{P(3) - P(0)}{3 - 0} = \frac{1100 - 500}{3} = 200 \text{ bacterias/día.}$$

El aumento de la población entre los días 0 y 10 es la integral de esa tasa:

$$\Delta P = \int_0^{10} P'(t) dt = \int_0^{10} 200 dt = [200t]_0^{10} = 2000 \text{ bacterias.}$$

Como al inicio había 500:

$$P(10) = P(0) + \Delta P = 500 + 2000 = \boxed{2500 \text{ bacterias}}.$$

Conclusión: el cultivo aumenta en 2000 bacterias y acaba con 2500.

Ejercicio A · Problema 4.2

Se relacionan x , producción en toneladas, e y , compras en millones de euros. La tabla reúne los seis datos del enunciado:

Producción x_i (toneladas)	110	125	130	140	150	155
Compras y_i (M euros)	30	41	43	47	50	55

La recta de regresión de y sobre x se calcula mediante $\hat{y} = \bar{y} + b(x - \bar{x})$, donde $b = S_{xy}/S_{xx}$. Aquí $\bar{x}$, $\bar{y}$ son las medias, S_{xx} mide la dispersión de las producciones y S_{xy} la variación conjunta de producción y compras.

$$\bar{x} = \frac{810}{6} = 135, \bar{y} = \frac{266}{6} = \frac{133}{3}.$$

$$S_{xx} = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 110750 - 6 \cdot 135^2 = 1400,$$

$$S_{xy} = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 36620 - 6 \cdot 135 \cdot \frac{133}{3} = 710.$$

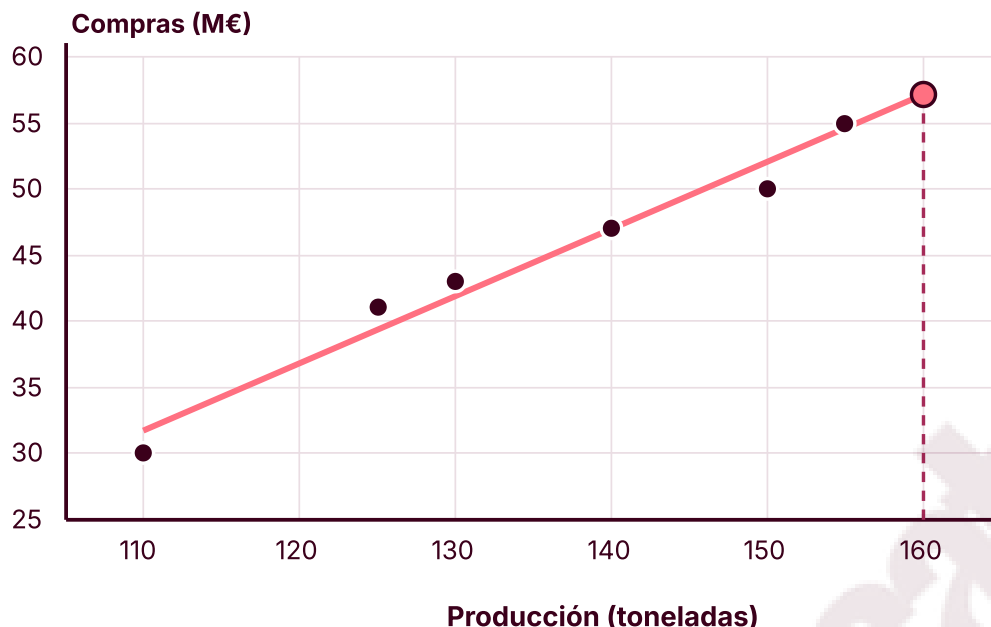
Por tanto, la pendiente y la ordenada en el origen son

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{710}{1400} = \frac{71}{140}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{133}{3} - \frac{71}{140} \cdot 135 = -\frac{2027}{84}.$$

La recta que dibujamos es

$$\hat{y} = -\frac{2027}{84} + \frac{71}{140}x.$$

Representamos los seis datos del enunciado, la recta ajustada y la lectura para $x = 160$:



La pendiente es positiva: en el intervalo observado, una producción mayor se asocia con compras mayores. La recta de mínimos cuadrados pasa por el centro de la nube $(\bar{x}, \bar{y})$. Para $x = 160$, calculamos:

$$\begin{aligned}\hat{y}(160) &= -\frac{2027}{84} + \frac{71}{140} \cdot 160 \\ &= \frac{4789}{84} \approx \boxed{57.01 \text{ millones de euros}}.\end{aligned}$$

La predicción se lee en la intersección de la vertical $x = 160$ con la recta. Para $x = 400$, la fórmula daría aproximadamente 178.73 millones, pero no sería una predicción fiable: 400 toneladas queda muy lejos del intervalo de datos observado, $[110, 155]$, y estaríamos extrapolando.

Conclusión: para 160 toneladas se estiman unos 57.01 millones de euros; no se debe usar esta recta para predecir con confianza a 400 toneladas.

Ejercicio B · Problema 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Existencia de A^{-1} y determinante de la inversa

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)((-5) \cdot 0 - 6(-1)) - (-1)(3 \cdot 0 - 6 \cdot 1) \\ &\quad + 2(3(-1) - (-5) \cdot 1) \\ &= -6 - 6 + 4 = -8 \neq 0.\end{aligned}$$

Por eso existe A^{-1} . Además, $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, de donde

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{8}}.$$

b) Cálculo de $B = A(A + 4I)$

Primero sumamos $4I$ a A :

$$A + 4I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos también A^2 , multiplicando filas por columnas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad 4A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 8 \\ 12 & -20 & 24 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usamos $A(A + 4I) = A^2 + 4A$ y sumamos las matrices obtenidas:

$$B = \begin{pmatrix} 0 - 4 & 4 - 4 & -8 + 8 \\ -12 + 12 & 16 - 20 & -24 + 24 \\ -4 + 4 & 4 - 4 & -4 + 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}} = -4I.$$

c) Números x, y, z, t

El apartado anterior establece la identidad

$$A^2 + 4A = -4I.$$

Multiplicamos por A^{-1} y despejamos:

$$A + 4I = -4A^{-1} \implies A^{-1} = -\frac{1}{4}A - I.$$

Al comparar con $A^{-1} = xA + yI$, resulta $\boxed{x = -1/4, y = -1}$. Al comparar $A^2 = -4A - 4I$ con $A^2 = zA + tI$, resulta $\boxed{z = -4, t = -4}$.

Conclusión: $\boxed{(x, y, z, t) = (-1/4, -1, -4, -4)}$.

Ejercicio B · Problema 2

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1), \quad D = (2, 1, 2).$$

a) Área del triángulo BCD

El área de un triángulo formado por dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ es la mitad del módulo de su producto vectorial. Tomamos los vectores desde B :

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, -1, 1), \quad \overrightarrow{BD} = D - B = (2, 0, 2).$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 2).$$

$$\text{Área}_{BCD} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

b) Volumen del tetraedro $ABCD$

El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante de tres aristas con origen común. Desde A :

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{AD} = (1, 1, 2).$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{|4|}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

c) Distancia de A al plano BCD

Un vector normal al plano es el producto vectorial ya calculado, $\vec{n} = (-2, 2, 2)$. Usando el punto B , su ecuación general es

$$-2(x - 0) + 2(y - 1) + 2(z - 0) = 0 \implies \pi_{BCD}: -x + y + z - 1 = 0.$$

Para un punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ y el plano $ax + by + cz + d = 0$, la distancia es

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Sustituimos $A = (1, 0, 0)$ y el plano obtenido:

$$d(A, \pi_{BCD}) = \frac{|-1 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

Conclusión: el área es $\sqrt{3}$, el volumen $2/3$ y la distancia pedida $2/\sqrt{3}$, en las unidades correspondientes.

Ejercicio B - Problema 3

El denominador es $(x + 1)^2 + 1$. Como un cuadrado es no negativo,

$$(x + 1)^2 + 1 \geq 1 > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

así que nunca se anula; el integrando es continuo en todo $\mathbb{R}$.

a) Primitiva

Para integrar, separamos el numerador en una parte proporcional a la derivada del denominador y otra parte constante:

$$4x + 11 = 4(x + 1) + 7, \quad \frac{d}{dx}((x + 1)^2 + 1) = 2(x + 1).$$

Usamos las fórmulas $\int u'/u \, dx = \ln|u| + C$ y $\int dx/(1 + x^2) = \arctan x + C$:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x + 11}{(x + 1)^2 + 1} \, dx &= \int \frac{4(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} \, dx + 7 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1} \\ &= 2 \ln((x + 1)^2 + 1) + 7 \arctan(x + 1) + C. \end{aligned}$$

El valor absoluto del logaritmo se puede omitir porque su argumento siempre es positivo.

Conclusión: una primitiva es $\boxed{F(x) = 2 \ln((x + 1)^2 + 1) + 7 \arctan(x + 1) + C}.$

b) Integral definida por la regla de Barrow

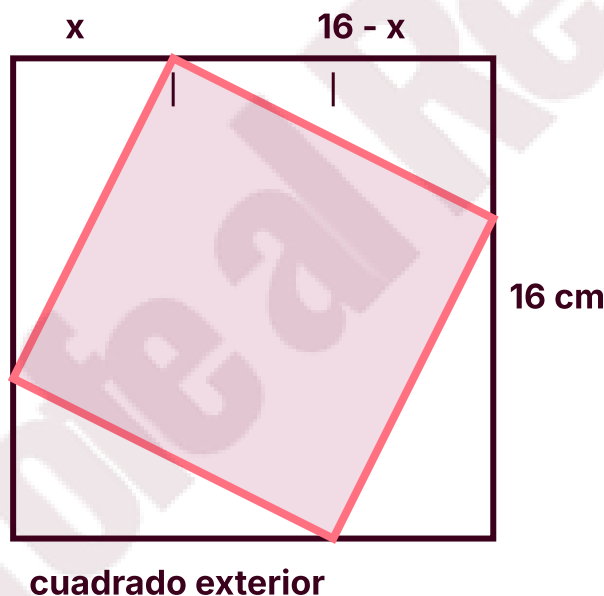
El intervalo del enunciado es $[0, \sqrt{3} - 1]$. Aplicamos Barrow con la primitiva anterior:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \left[2 \ln((x+1)^2+1) + 7 \arctan(x+1) \right]_0^{\sqrt{3}-1} \\ &= \left(2 \ln 4 + \frac{7\pi}{3} \right) - \left(2 \ln 2 + \frac{7\pi}{4} \right) \\ &= \boxed{2 \ln 2 + \frac{7\pi}{12}} \approx 3.219. \end{aligned}$$

Conclusión: la integral definida vale exactamente $2 \ln 2 + 7\pi/12$.

Ejercicio B · Problema 4.1

Inscribimos un cuadrado en otro de lado 16 cm. Sea x uno de los catetos de los cuatro triángulos de las esquinas; el otro mide $16 - x$, con $0 \leq x \leq 16$. El dibujo representa esa construcción:



El área del cuadrado exterior es $16^2 = 256 \text{ cm}^2$. El área de cada triángulo de esquina es $\frac{1}{2}x(16 - x)$; hay cuatro triángulos. Por tanto, el área $A(x)$ del cuadrado interior es

$$\begin{aligned} A(x) &= 256 - 4 \cdot \frac{x(16 - x)}{2} \\ &= 256 - 32x + 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 16. \end{aligned}$$

El dominio geométrico es $[0, 16]$: los dos catetos x y $16 - x$ no pueden ser negativos. Comprobamos las asíntotas en este dominio: $A(x)$ es polinómica y finita en todo el intervalo, con $A(0) = A(16) = 256$, así que no hay asíntotas verticales. El dominio está acotado, por lo que no hay límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y no existen asíntotas horizontales ni oblicuas para este modelo.

Buscamos el mínimo en el intervalo permitido. Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = -32 + 4x = 0 \implies x = 8.$$

Probamos un valor a cada lado del punto crítico, ambos dentro del dominio:

$$A'(4) = -32 + 4 \cdot 4 = -16 < 0, \quad A'(12) = -32 + 4 \cdot 12 = 16 > 0.$$

La tabla resume los signos; los extremos también pertenecen al dominio y se comprueban aparte:

x	0	4	8	12	16
$A'(x)$	-32	-16	0	16	32
Signo	-	-	0	+	+
Variación	$\searrow$	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	$\nearrow$

La derivada cambia de negativa a positiva en $x = 8$, así que allí hay un mínimo relativo. Además, en los extremos $A(0) = A(16) = 256$, mayor que el valor interior; por ello el mínimo es absoluto:

$$A(8) = 256 - 32 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2 = 128 \text{ cm}^2.$$

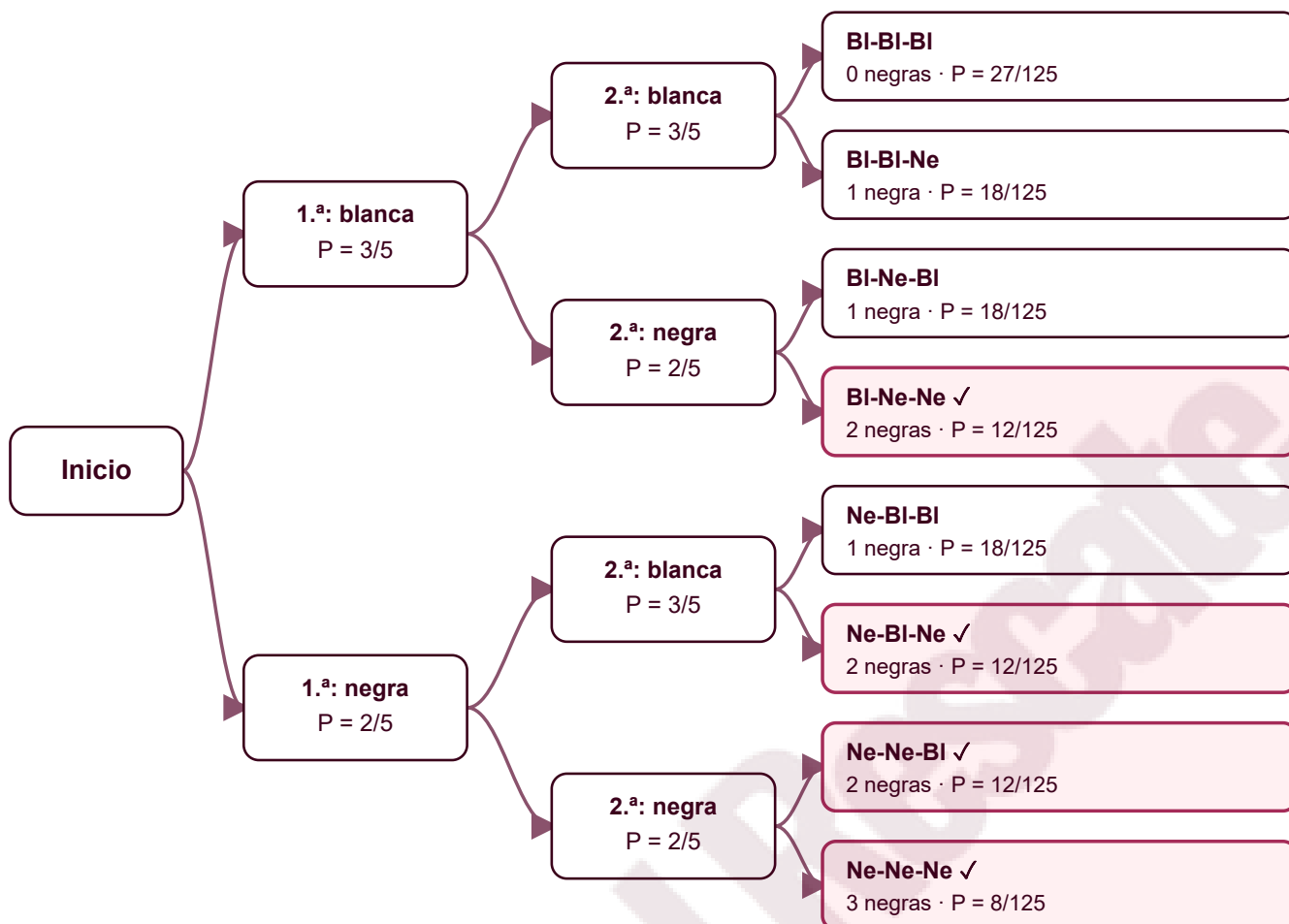
Si s es el lado del cuadrado interior, $s^2 = A(8)$. Como una longitud es positiva:

$$s = \sqrt{128} = \boxed{8\sqrt{2} \text{ cm}}.$$

Conclusión: el cuadrado de área mínima tiene lado $8\sqrt{2}$ cm.

Ejercicio B · Problema 4.2

La urna tiene 6 bolas blancas y 4 negras. Después de cada extracción, se devuelve la bola. Por eso, antes de cada nueva extracción la urna vuelve a tener 6 blancas y 4 negras: siempre se cumple $P(\text{blanca}) = 6/10 = 3/5$ y $P(\text{negra}) = 4/10 = 2/5$. En el árbol, cada caja de las dos primeras columnas dice qué color salió y la probabilidad de ese resultado. La última columna recoge las secuencias completas y sus probabilidades.



BI = blanca · Ne = negra · ✓ = más de una bola negra

Para hallar la probabilidad de una hoja, multiplicamos las probabilidades de sus tres ramas. Por ejemplo:

$$P(\text{BI-Ne-Ne}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125}.$$

El suceso pedido, «más de una negra», reúne cuatro hojas incompatibles: BI-Ne-Ne, Ne-BI-Ne, Ne-Ne-BI y Ne-Ne-Ne. Sumamos sus probabilidades:

$$\begin{aligned}
 P(\text{más de una negra}) &= \frac{12}{125} + \frac{12}{125} + \frac{12}{125} + \frac{8}{125} \\
 &= \frac{44}{125} = 0.352.
 \end{aligned}$$

Conclusión: la probabilidad de obtener más de una bola negra es $\frac{44}{125} = 0.352$, es decir, **35.2%**.