

Modelo 2 de 2003

Funciones simétricas, extremos, sistemas, integrales y matrices.

Opción A - Ejercicio 1

La simetría respecto del origen significa que f es impar: $f(-x) = -f(x)$. En particular, $f(0) = -f(0)$, luego $f(0) = 0$. La parte no dibujada se obtiene reflejando cada punto de la gráfica respecto del origen. El tramo horizontal $y = 1$ para $0 < x \leq 1$ se convierte en $y = -1$ para $-1 \leq x < 0$. El segmento de $(1, 2)$ a $(3, 3)$ se convierte en el segmento abierto de $(-3, -3)$ a $(-1, -2)$. Las pendientes de los tramos lineales dan la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -3 < x < -1, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

En $x = -1, 0, 1$ hay discontinuidades, así que la derivada no existe en esos puntos. **Opción A - Ejercicio 2**

Para que $ax^2 + bx + c$ tenga un máximo en $x = 1$, su vértice debe estar allí: $-b/(2a) = 1$, así que $b = -2a$. Además, $f(1) = 4$ da $c = 4 + a$. Integramos usando estas relaciones:

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - ax^2 + (4+a)x \right]_{-1}^3 = 16 + \frac{16a}{3}.$$

Al igualar a $32/2 = 16$, se obtiene $a = 0$, y entonces $b = 0$, $c = 4$. Así, con las condiciones tal como están escritas, $f(x) = 4$. Esta función constante alcanza un máximo absoluto en $x = 1$, aunque también lo alcanza en todos los demás puntos. Si el enunciado pretendía un máximo estricto o único, los datos serían incompatibles: una función constante no tiene un máximo único. **Opción A - Ejercicio 3**

El sistema es homogéneo, por lo que siempre tiene la solución nula. Para que tenga más de una solución, la matriz de coeficientes debe ser singular:

$$A_m = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 2 & 4-m \end{pmatrix}, \quad \det A_m = -(m-1)(m^2 - 7m + 9).$$

Al imponer $\det A_m = 0$ obtenemos

$$m = 1, \quad m = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}, \quad m = \frac{7 + \sqrt{13}}{2}.$$

En estos valores el rango es menor que el número de incógnitas, así que existe una solución no nula y, al ser homogéneo, hay infinitas soluciones. **Opción A - Ejercicio 4**

La recta que es intersección de los planos $x + z = 4$ y $x - 2y + z = 1$ cumple $y = 3/2$ y $x + z = 4$. Tomando $x = 9/4$, obtenemos el punto $Q = (9/4, 3/2, 7/4)$. La recta buscada pasa por $P = (3, 1, -1)$ y por Q . Su vector director es

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{11}{4} \right) \sim (-3, 2, 11).$$

El vector normal del plano dado es $n = (3, -1, 1)$ y $n \cdot (-3, 2, 11) = 0$, por lo que esta recta es paralela al plano. En forma paramétrica:

$$(x, y, z) = (3, 1, -1) + t(-3, 2, 11), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La condición de que la tangente en $x = 0$ sea horizontal da $f'(0) = c = 0$. El punto de inflexión en $(1, 2)$ satisface $f(1) = 2$ y $f''(1) = 0$. Como

$$f''(x) = 6ax + 2b,$$

la segunda condición da $b = -3a$. De $f(0) = d = 4$ y $f(1) = a + b + c + d = 2$ se obtiene $a - 3a + 4 = 2$, luego $a = 1$ y $b = -3$. Por tanto,

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 0, \quad d = 4.$$

Opción B - Ejercicio 2

El área rayada inferior es la comprendida entre la parábola y el eje x desde $x = 1$ hasta $x = m$. La superior es la comprendida entre $y = 1$ y la parábola desde $x = m$ hasta $x = 2$. Igualamos las áreas:

$$\int_1^m \frac{x^2}{4} dx = \int_m^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx.$$

Al evaluar las integrales, $\frac{m^3-1}{12} = \frac{4}{3} - m + \frac{m^3}{12}$; se simplifica a $m = 17/12$. Este valor está entre 1 y 2, como exige la figura. Así,

$$m = \frac{17}{12}.$$

Opción B - Ejercicio 3

(a) Si A es de orden 3, entonces $\det(4A) = 4^3 \det A$. Por tanto, $\det(4A) = 64(-2) = -128$. (b) La matriz $3B + B^2$ no tiene inversa cuando su determinante es cero. Calculando el determinante y factorizando,

$$\det(3B + B^2) = -2(\lambda - 4)(4\lambda - 1).$$

Por ello, la matriz es singular para $\lambda = 4$ o $\lambda = \frac{1}{4}$.

Opción B - Ejercicio 4

La recta r es la intersección de los planos $x + y - z = 1$ e $y = 2$. El haz de planos que la contiene se obtiene combinando sus ecuaciones:

$$\lambda(x + y - z - 1) + \mu(y - 2) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

La dirección de r es $u = (1, 0, 1)$. La dirección de la intersección con π debe pertenecer a π y ser paralela al plano $z = 0$; una dirección que cumple ambas condiciones es $v = (2, 1, 0)$, pues $(1, -2, 1) \cdot v = 0$ y su tercera componente es cero. Un normal al plano buscado es

$$n = u \times v = (-1, 2, 1).$$

Tomando el punto $Q = (-1, 2, 0)$ de r , obtenemos la ecuación general del plano:

$$-(x + 1) + 2(y - 2) + z = 0 \implies x - 2y - z + 5 = 0.$$