

Modelo 2 de 2009

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

El dominio es $[1, +\infty)$. Para hallar la asíntota oblicua $y = mx + n$ estudiamos primero $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} + 1 \right) = 2.$$

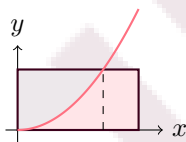
Después,

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = -\frac{1}{2}.$$

La asíntota es $y = 2x - \frac{1}{2}$.

Opción A · Ejercicio 2

Dentro del rectángulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, la curva $y = x^2/2$ corta el lado superior en $x = \sqrt{2}$. La figura representa el rectángulo y los dos recintos determinados por la parábola:



El área bajo la curva dentro del rectángulo es

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{2} dx + \int_{\sqrt{2}}^2 1 dx = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

El rectángulo tiene área 2, de modo que el otro recinto tiene área $A_2 = 2 - A_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Así, $A_1 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $A_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Opción A · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El determinante es

$$\det A = \lambda(\lambda - 6).$$

La ampliada es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

Si $\lambda \neq 0, 6$, el determinante no se anula y el sistema es SCD. Para $\lambda = 0$, $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$, así que es SCI; las ecuaciones dan $x = 0$ e $y + 3z = 1$, es decir,

$$(x, y, z) = (0, 1 - 3t, t).$$

Para $\lambda = 6$, los rangos son 2 y 3, por lo que es incompatible. En particular, con $\lambda = 0$ la solución es $(0, 1 - 3t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Opción A · Ejercicio 4

Parametrizamos $r = (3, 0, -1) + t(1, 2, -2)$ y $s = (1, 1, 0) + u(-1, 2, 0)$. Sus directores no son proporcionales. Al igualar coordenadas, la coordenada z fuerza $t = -1/2$, pero entonces las ecuaciones de x e y no admiten un mismo u ; son rectas alabeadas. El plano por $P = (1, 0, 0)$ paralelo a ambas tiene como vectores directores los de r y s . Su producto vectorial es proporcional a $(2, 1, 2)$, normal del plano. Así,

$$2(x - 1) + y + 2z = 0, \quad \boxed{2x + y + 2z - 2 = 0}.$$

Opción B · Ejercicio 1

Sean $x, y > 0$ los lados del rectángulo, con $xy = 16$. La diagonal al cuadrado mide $d^2 = x^2 + y^2$. Por la desigualdad $(x - y)^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 2xy = 32$, con igualdad cuando $x = y$. Por tanto, el rectángulo de diagonal mínima es el cuadrado de lado 4 y su diagonal mide $\boxed{4\sqrt{2} \text{ cm}}$.

Opción B · Ejercicio 2

La integral real está definida para $|x| < \sqrt{2/3}$. Con $t = \frac{3}{2}x^2$, $dt = 3x dx$ y $\sqrt{4 - 9x^4} = 2\sqrt{1 - t^2}$. Así,

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4 - 9x^4}} dx = \frac{1}{6} \arcsin\left(\frac{3}{2}x^2\right) + C.$$

La condición $F(0) = 3$ fija $C = 3$. Luego

$$\boxed{F(x) = 3 + \frac{1}{6} \arcsin\left(\frac{3}{2}x^2\right)}.$$

Opción B · Ejercicio 3

Primero, $\det A = 4$, de modo que A^{-1} existe. La ecuación $AX - B^T = 2C$ se reordena como $X = A^{-1}(B^T + 2C)$. Se tiene

$$B^T + 2C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}}.$$

Opción B · Ejercicio 4

Parametrizamos $r = (-3, 0, -4) + t(1, 1, 2)$ y $s = (-3, -\frac{1}{2}, 0) + u(2, 0, 1)$. Sus directores no son proporcionales y, al intentar igualar coordenadas, se obtiene una contradicción; por ello son alabeadas. El plano por r paralelo a s contiene ambos vectores directores. Un normal es $(1, 1, 2) \times (2, 0, 1) = (1, 3, -2)$. Al pasar por $(-3, 0, -4)$:

$$\boxed{x + 3y - 2z - 5 = 0}.$$

Si un plano contuviera r y fuera perpendicular a s , su normal tendría que ser paralelo a la dirección $(2, 0, 1)$ de s . Pero $(2, 0, 1) \cdot (1, 1, 2) = 4 \neq 0$, de modo que no podría ser normal a un plano que contenga a r . No existe tal plano.