

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, resolvemos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

Un litro equivale a 1 dm^3 . Llamamos r al radio y h a la altura del cilindro, expresados en decímetros. Al tener tapa, la hojalata necesaria corresponde al área de las dos bases circulares y de la superficie lateral:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

La capacidad fija impone $\pi r^2 h = 1$, por lo que $h = 1/(\pi r^2)$. Así, el área a minimizar depende solo del radio:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}, \quad r > 0.$$

Buscamos los puntos críticos y comprobamos que dan un mínimo:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \implies r^3 = \frac{1}{2\pi}, \quad S''(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3} > 0.$$

Por tanto, el radio que minimiza la superficie es $r = \sqrt[3]{1/(2\pi)}$ dm. Al sustituirlo en la condición de volumen, $h = 1/(\pi r^2) = 2r$. Las dimensiones son

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ dm}, \quad h = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \text{ dm}.$$

Equivalen aproximadamente a un radio de 5.42 cm y una altura de 10.84 cm.

Opción A - Ejercicio 2

La raíz exige $2x + 1 \geq 0$, y el denominador se anula en $x = -1/2$. Por ello, el integrando está definido para $x > -1/2$. Usamos la sustitución sugerida $t = \sqrt{2x+1}$; entonces $x = (t^2 - 1)/2$ y $dx = t dt$. La integral queda

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{t^2}{t^2+t} dt = \int \frac{t}{t+1} dt.$$

Separamos $t/(t+1) = 1 - 1/(t+1)$ y obtenemos

$$\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = t - \ln(t+1) + C.$$

Volviendo a la variable x ,

$$\sqrt{2x+1} - \ln(\sqrt{2x+1} + 1) + C.$$

Opción A - Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = -(1+k)(1-k) = k^2 - 1.$$

a) Para que una matriz 2×2 tenga rango 1, su determinante debe ser cero y la matriz no debe ser nula. La condición $k^2 - 1 = 0$ da $k = 1$ o $k = -1$; en ambos casos la matriz tiene entradas no nulas. Luego

$$k = \pm 1.$$

b) Calculamos la potencia y la comparamos con A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k(k+1) \\ k(1-k) & 1-k^2 \end{pmatrix}.$$

Si $A^2 = A$, la entrada superior izquierda exige $1 = k$, así que necesariamente $k = 1$. Al sustituirlo, se obtiene $A^2 = A$; por tanto,

$$k = 1.$$

c) Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es cero. Por tanto,

$$\det A = k^2 - 1 \neq 0 \implies \boxed{k \neq -1, 1.}$$

d) La condición $\det A = -2$ daría

$$k^2 - 1 = -2 \implies k^2 = -1.$$

No existe ningún valor real de k que cumpla esta igualdad, así que

$$\boxed{\text{no existe ningún } k \in \mathbb{R}.}$$

Opción A - Ejercicio 4

Convertimos primero la recta a forma paramétrica, tomando como parámetro el valor común t :

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

El plano π' está dado por el punto $P_0 = (-3, 0, -6)$ y los vectores directores $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Su normal es

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, 1),$$

por lo que, usando P_0 , su ecuación general es $x + y + z + 9 = 0$. El otro plano es $x + y + z + 3 = 0$; tienen el mismo vector normal y son paralelos.

La distancia de (x, y, z) a un plano $ax + by + cz + d = 0$ es $|ax + by + cz + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. En este caso, las distancias a ambos planos son iguales cuando

$$|x + y + z + 3| = |x + y + z + 9|,$$

lo que describe el plano intermedio $x + y + z + 6 = 0$. Para hallar el punto pedido, intersectamos ese plano con r :

$$(1 + 2t) + (-1 + t) + 3t + 6 = 0 \implies 6t + 6 = 0 \implies t = -1.$$

Al sustituirlo en la recta, resulta

$$\boxed{P = (-1, -2, -3).}$$

Sus distancias a los dos planos son $\sqrt{3}$, como se comprueba sustituyendo sus coordenadas en la fórmula.

Opción B - Ejercicio 1

La función es $f(x) = |x^2 - 4|$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Según el signo de $x^2 - 4$, podemos escribir

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & |x| \geq 2, \\ 4 - x^2, & |x| < 2. \end{cases}$$

En los intervalos abiertos separados por $x = -2, 0, 2$, sus derivadas son $2x$ para $|x| > 2$ y $-2x$ para $|x| < 2$. Comprobamos sus signos:

Intervalo	Valor de prueba de $f'(x)$	Signo
$(-\infty, -2)$	$f'(-3) = -6$	-
$(-2, 0)$	$f'(-1) = 2$	+
$(0, 2)$	$f'(1) = -2$	-
$(2, +\infty)$	$f'(3) = 6$	+

Así, f decrece en $(-\infty, -2)$ y $(0, 2)$, y crece en $(-2, 0)$ y $(2, +\infty)$. En $x = -2$ y $x = 2$ pasa de decrecer a crecer, luego tiene mínimos relativos (y absolutos) de valor 0. En $x = 0$ pasa de crecer a decrecer, así que tiene un máximo relativo de valor 4:

$$\boxed{\text{mínimos } (-2, 0), (2, 0); \quad \text{máximo relativo } (0, 4).}$$

b) Como -1 pertenece al intervalo $(-2, 2)$, alrededor de ese punto $f(x) = 4 - x^2$. Así, $f(-1) = 3$ y $f'(-1) = 2$. La recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por $(-1, 3)$:

$$y - 3 = 2(x + 1) \implies \boxed{y = 2x + 5}.$$

La normal es perpendicular a la tangente y su pendiente es $-1/2$. Por el mismo punto,

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos dos veces la derivada segunda. Como la derivada de $\cos(2x)$ es $-2\sin(2x)$,

$$f'(x) = \cos(2x) + C_1, \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C_1x + C_2.$$

La condición $f(0) = 1$ da $C_2 = 1$. Aplicando $f(\pi/2) = 0$,

$$0 = \frac{1}{2}\sin \pi + C_1 \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{2}{\pi}.$$

La función buscada es

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{2}{\pi}x + 1.}$$

Opción B - Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda + 1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1.$$

Por tanto, A es invertible para todo λ .

a) La igualdad $A^{-1} = 2I - A$ equivale, al multiplicar por A , a $I = 2A - A^2$, es decir, a $(A - I)^2 = 0$. Calculamos:

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es nula exactamente cuando $\lambda(\lambda + 1) = 0$. Ambos valores satisfacen la igualdad inicial porque A es invertible; así,

$$\boxed{\lambda = 0 \quad \text{o} \quad \lambda = -1.}$$

b) Sumamos la matriz y su traspuesta:

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ \lambda + 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada no tiene inversa si su determinante es cero. En este caso,

$$\det(A + A^T) = 4 - 6\lambda^2 - 6\lambda = -2(3\lambda^2 + 3\lambda - 2).$$

Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{6}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\lambda = \frac{-3 + \sqrt{33}}{6} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta, escrita en forma paramétrica, es

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -2 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

y su vector director es $\vec{d} = (-3, 2, -1)$. El vector normal del plano $\pi : 6x - my + 2z = 1$ es $\vec{n} = (6, -m, 2)$.

a) Para que la recta sea perpendicular al plano, su vector director debe ser paralelo al vector normal. Comparando la primera y tercera componentes, el factor de proporcionalidad es $-1/2$; la segunda componente debe satisfacer $2 = (-1/2)(-m)$. Luego

$$m = 4.$$

b) Para que r esté contenida en el plano, todos sus puntos deben verificar la ecuación. Sustituimos sus ecuaciones paramétricas:

$$6(1 - 3t) - m(-1 + 2t) + 2(-2 - t) = 1 \iff m + 2 - (20 + 2m)t = 1.$$

La igualdad tendría que cumplirse para todo t , de modo que el término independiente exigiría $m + 2 = 1$ y el coeficiente de t exigiría $20 + 2m = 0$. La primera condición da $m = -1$ y la segunda $m = -10$, que no pueden cumplirse a la vez. Por tanto,

no existe ningún valor de m .