

Septiembre de 2005 · Convocatoria extraordinaria

Resolvemos todos los problemas paso a paso. En el examen se escogen tres problemas de cada ejercicio y no se pueden escoger a la vez A.4.1 y A.4.2.

Ejercicio A · Problema 1

Se pide hallar (X) a partir de

$$(AB^T + C)X = (A^T D)E,$$

donde la traspuesta intercambia filas por columnas. Las matrices y vectores son

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Primero calculamos el producto exterior. Si (A) y (B) son columnas, entonces AB^T es una matriz 3×3 :

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (7 \quad 2 \quad -2) = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Sumamos (C):

$$M = AB^T + C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $A^T D$ es un número:

$$A^T D = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 10, N = (A^T D)E = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Así, la ecuación matricial se convierte en $MX = N$. Comprobamos que (M) es invertible:

$$\det(M) = 7 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ 21 & -5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 14 & 5 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = -7 - 28 + 42 = 7 \neq 0.$$

Por tanto, la solución es única. Resolvemos por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -2 & 20 \\ 14 & 5 & -4 & 50 \\ 21 & 6 & -5 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-2R_1, R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & -2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -30 \end{array} \right).$$

De las dos últimas filas obtenemos $y = 10$ y $z = -30$. Sustituimos en la primera:

$$7x + 2(10) - 2(-30) = 20 \implies 7x + 80 = 20 \implies x = -\frac{60}{7}.$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -60/7 \\ 10 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A · Problema 2

Las tres aristas que parten del origen están sobre las rectas dadas. Las escribimos en forma paramétrica:

$$\ell : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad m : \begin{cases} x = 2t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad n : \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sus vectores directores son, respectivamente,

$$v_\ell = (0, 0, 1), \quad v_m = (2, 1, 0), \quad v_n = (1, -2, 0).$$

Comprobamos que forman direcciones perpendiculares:

$$v_\ell \cdot v_m = 0, \quad v_\ell \cdot v_n = 0, \quad v_m \cdot v_n = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Para separar el vértice ($P = (12, 21, -11)$) según esas tres direcciones ortogonales, usamos la fórmula de proyección sobre un vector (v): el coeficiente es $(P \cdot v / v \cdot v)$. Así,

$$\frac{P \cdot v_m}{v_m \cdot v_m} = \frac{12 \cdot 2 + 21 \cdot 1}{5} = 9, \quad \frac{P \cdot v_n}{v_n \cdot v_n} = \frac{12 \cdot 1 + 21 \cdot (-2)}{5} = -6, \quad \frac{P \cdot v_\ell}{v_\ell \cdot v_\ell} = -11.$$

Luego

$$P = 9v_m - 6v_n - 11v_\ell = (18, 9, 0) + (-6, 12, 0) + (0, 0, -11).$$

Estos son los tres vectores arista desde el origen hasta el vértice opuesto. Sumando cada subconjunto de ellos, obtenemos los ocho vértices:

$$(0, 0, 0), (18, 9, 0), (-6, 12, 0), (0, 0, -11), \\ (12, 21, 0), (18, 9, -11), (-6, 12, -11), (12, 21, -11).$$

Las longitudes de las tres aristas son

$$|9v_m| = 9\sqrt{5}, \quad |-6v_n| = 6\sqrt{5}, \quad |-11v_\ell| = 11.$$

El volumen de un ortoedro es el producto de las longitudes de sus aristas:

$$V = (9\sqrt{5})(6\sqrt{5})(11) = 2970 \text{ unidades}^3.$$

Ejercicio A · Problema 3

a) Ángulo central que hace máxima el área

Para un sector de radio (R) y ángulo α (en radianes),

$$P = 2R + R\alpha, \quad A = \frac{1}{2}R^2\alpha.$$

Como el perímetro vale **4 m**, despejamos el radio:

$$2R + R\alpha = 4 \implies R(\alpha + 2) = 4 \implies R = \frac{4}{\alpha + 2}.$$

Sustituimos en el área para dejarla en función de una sola variable:

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{4}{\alpha + 2} \right)^2 = \frac{8\alpha}{(\alpha + 2)^2}.$$

El dominio físico del ángulo es $0 < \alpha < 2\pi$. Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(\alpha) = \frac{8(2 - \alpha)}{(\alpha + 2)^3} = 0 \iff \alpha = 2.$$

El denominador es positivo en todo el dominio; por eso el signo depende de $2 - \alpha$. Probamos a ambos lados del punto crítico:

α	$(0, 2)$	2	$(2, 2\pi)$
$A'(\alpha)$	+	0	-
$A(\alpha)$	crece	máximo	decrece

La derivada cambia de positiva a negativa, así que el área máxima se alcanza cuando

$$\boxed{\alpha = 2 \text{ rad}}.$$

b) Radio que hace mínimo el perímetro

Ahora el área vale 1 m^2 . Partimos de la fórmula del área:

$$\frac{1}{2}R^2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{R^2}, R > 0.$$

Sustituimos este ángulo en el perímetro:

$$P(R) = 2R + R\frac{2}{R^2} = 2R + \frac{2}{R}.$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$P'(R) = 2 - \frac{2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^2 = 1.$$

Como un radio es positivo, el único punto crítico permitido es $R = 1$. Comprobamos el signo con un valor a cada lado:

R	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$P'(R)$	-	0	+
$P(R)$	decrece	mínimo	crece

Por tanto,

$$\boxed{R = 1 \text{ m}}, P_{\min} = 2(1) + \frac{2}{1} = 4 \text{ m}.$$

Ejercicio A - Problema 4.1

El caudal (C) es proporcional a la cuarta potencia del radio (r). Escribimos la ley física como

$$C = kr^4,$$

donde (k) es la constante de proporcionalidad. El radio real es un 0,5 % menor que el previsto; por tanto,

$$r_{\text{real}} = r_{\text{previsto}} \left(1 - \frac{0,5}{100}\right) = 0,995 r_{\text{previsto}}.$$

Comparamos ambos caudales; la constante (k) y el radio previsto se cancelan:

$$\frac{C_{\text{real}}}{C_{\text{previsto}}} = \frac{k(0,995r_{\text{previsto}})^4}{kr_{\text{previsto}}^4} = (0,995)^4 = 0,980149500625.$$

Por tanto, el caudal real representa el 98,01495 % del previsto. La reducción es

$$(1 - 0,980149500625)100\% = 1,9850499375\% \approx 2\%.$$

La reducción estimada del caudal es

$$\boxed{1,99\% \text{ aproximadamente.}}$$

Como comprobación aproximada, usamos la relación diferencial entre el caudal y el radio:

$$\frac{\Delta C}{C} \approx 4 \frac{\Delta r}{r} = 4(-0,5\%) = -2\%.$$

El signo negativo indica una disminución cercana al 2 %, en concordancia con el cálculo exacto.

Ejercicio A · Problema 4.2

a) Nube de puntos, recta de regresión y signo de la correlación

Usamos los pares de calificaciones indicados. Llamamos x a la nota de Matemáticas e y a la de Física. Para calcular la recta de regresión de y sobre x , hallamos primero las medias y las sumas centradas:

$$\bar{x} = \frac{6 + 3 + 9 + 5}{4} = 5,75, \quad \bar{y} = \frac{4,5 + 2,4 + 6,6 + 10}{4} = 5,875,$$

$$S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = 18,75, \quad S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 8,475.$$

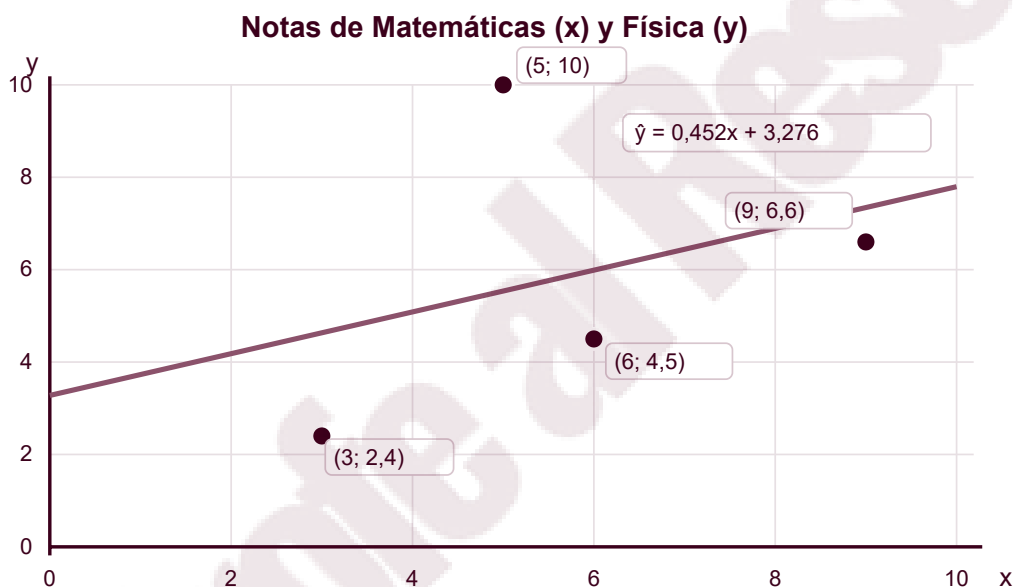
La pendiente y la ordenada en el origen se obtienen con

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{8,475}{18,75} = 0,452, \quad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 5,875 - 0,452 \cdot 5,75 = 3,276.$$

Por ello, la recta estimada es

$$\hat{y} = 0,452x + 3,276.$$

El siguiente gráfico representa los datos y esa recta; los puntos muestran una tendencia ascendente.



Para orientar la elección del coeficiente, calculamos su valor con los datos. Usamos la fórmula de Pearson:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}, \quad S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 31,5075.$$

Sustituimos:

$$r = \frac{8,475}{\sqrt{18,75 \cdot 31,5075}} \approx 0,3487.$$

El signo es positivo y, entre (-1), (-0,5) y (0,5), el valor está más cerca de (0,5).

b) Correlación de los cuatro primeros datos

Para los cuatro pares enumerados, aplicamos de nuevo la misma fórmula:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8,475}{\sqrt{18,75 \cdot 31,5075}} \approx 0,3487.$$

El coeficiente está entre 0 y 1: la relación es positiva, pero no perfecta. En el gráfico se ve una tendencia creciente con dispersión, especialmente por el punto (5; 10); los cuatro datos no quedan sobre una misma recta.

Ejercicio B · Problema 1

Sean (x,y,z) las proporciones, entre (0) y (1), de Migato, Catomeal y Comecat en un kilo de mezcla. Por ejemplo, Migato aporta **600 g** de carne por kilo de ese alimento; por eso la carne total debe cumplir

$$600x + 300y + 200z = 470.$$

Hacemos lo mismo con el pescado y la verdura:

$$\begin{cases} 600x + 300y + 200z = 470, \\ 300x + 400y + 600z = 370, \\ 100x + 300y + 200z = 160. \end{cases}$$

Dividimos cada ecuación entre (100) para simplificar:

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 4,7, \\ 3x + 4y + 6z = 3,7, \\ x + 3y + 2z = 1,6. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes tiene determinante

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -50 \neq 0.$$

Por tanto, el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada son (3); por Rouché-Frobenius, hay una única mezcla. Resolvemos por eliminación:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 2 & 4,7 \\ 3 & 4 & 6 & 3,7 \\ 1 & 3 & 2 & 1,6 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1,6 \\ 3 & 4 & 6 & 3,7 \\ 6 & 3 & 2 & 4,7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 - 3R_1, R_3 - 6R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1,6 \\ 0 & -5 & 0 & -1,1 \\ 0 & -15 & -10 & -4,9 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1,6 \\ 0 & -5 & 0 & -1,1 \\ 0 & 0 & -10 & -1,6 \end{array} \right). \end{aligned}$$

De abajo hacia arriba:

$$z = 0,16, \quad y = 0,22, \quad x = 1,6 - 3(0,22) - 2(0,16) = 0,62.$$

Las proporciones suman $0,62 + 0,22 + 0,16 = 1$, como deben. Por tanto, la mezcla es

62% de Migato, 22% de Catomeal, 16% de Comecat.
--

Ejercicio B · Problema 2

Los planos dados están en forma general:

$$\pi : 5x - y - z = 0, \quad \sigma : x + y - z = 0, \quad P = (9, 4, -1).$$

a) Plano por (P) perpendicular a los dos planos

Los vectores normales de π y σ son

$$n_\pi = (5, -1, -1), \quad n_\sigma = (1, 1, -1).$$

El normal del plano buscado debe ser perpendicular a ambos; lo obtenemos mediante el producto vectorial:

$$n_\pi \times n_\sigma = (2, 4, 6) = 2(1, 2, 3).$$

Tomamos $(n=(1,2,3))$. La forma general de un plano con ese normal es $x + 2y + 3z + D = 0$. Sustituimos el punto (P):

$$9 + 2 \cdot 4 + 3(-1) + D = 0 \implies D = -14.$$

Así, la ecuación pedida, en forma general, es

$x + 2y + 3z - 14 = 0$.

b) Punto simétrico de (P) respecto de la recta de intersección

La recta $r = \pi \cap \sigma$ pasa por el origen. Restamos las ecuaciones de los planos:

$$(5x - y - z) - (x + y - z) = 0 \implies 4x - 2y = 0 \implies y = 2x.$$

Al sustituir en σ , $z = x + y = 3x$. Por tanto, la recta en forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t, \end{cases}$$

Su vector director es $(v=(1,2,3))$. El pie (H) de la perpendicular desde (P) a una recta que pasa por el origen se calcula proyectando (P) sobre (v):

$$H = \frac{P \cdot v}{v \cdot v} v, \quad \frac{P \cdot v}{v \cdot v} = \frac{9 + 8 - 3}{1 + 4 + 9} = 1.$$

Así, $(H=(1,2,3))$. Como (H) es el punto medio entre (P) y su simétrico (P'),

$$P' = 2H - P = 2(1, 2, 3) - (9, 4, -1) = \boxed{(-7, 0, 7)}.$$

Ejercicio B · Problema 3

La curva es $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Su dominio es todo $\mathbb{R}$, porque es una función polinómica. Buscamos los puntos de tangencia y escribimos las rectas exclusivamente en forma paramétrica.

Sea $T = (a, f(a))$ un punto de la curva. La pendiente de la tangente se obtiene derivando la función:

$$f'(x) = 2x + 2, \quad f'(a) = 2a + 2.$$

Una recta paramétrica que parte de (T) con esa pendiente puede escribirse

$$r_a : \begin{cases} x = a + s, \\ y = f(a) + f'(a)s, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para que la recta pase por el punto $(2, 3)$, su primera coordenada obliga a que $s = 2 - a$. La segunda coordenada debe ser 3, así que:

$$3 = f(a) + f'(a)(2 - a) = (a^2 + 2a - 1) + (2a + 2)(2 - a).$$

Desarrollamos el producto y simplificamos:

$$3 = -a^2 + 4a + 3 \iff a^2 - 4a = 0 \iff a(a - 4) = 0.$$

Hay dos puntos de tangencia. Para $a = 0$, el punto es $T = (0, -1)$ y la pendiente es 2; para $a = 4$, el punto es $T = (4, 23)$ y la pendiente es 10. Las dos rectas tangentes, exclusivamente en forma paramétrica, son

$$r_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = -1 + 2t, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 23 + 10t, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Al sustituir $t = 2$ en r_1 y $t = -2$ en r_2 , en ambos casos obtenemos el punto $(2, 3)$, como exige el enunciado.

Ejercicio B · Problema 4.1

Tomamos (P) como origen y medimos el tiempo (t) en horas. Los canales $y = x$ e $y = -x$ son perpendiculares. Elegimos, sin pérdida de generalidad, una posición inicial en cada uno de los dos rayos. Las distancias dirigidas a (P) son

$$a(t) = 20 - 30t \text{ km}, \quad b(t) = 15 - 60t \text{ km}.$$

Como una dirección unitaria de $y = x$ es $((1,1)/2)$, y una de $y = -x$ es $((1,-1)/2)$, las trayectorias paramétricas pueden escribirse

$$A(t) : \begin{cases} x_A = (20 - 30t)/\sqrt{2}, \\ y_A = (20 - 30t)/\sqrt{2}, \end{cases} \quad B(t) : \begin{cases} x_B = (15 - 60t)/\sqrt{2}, \\ y_B = -(15 - 60t)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

La distancia entre las lanchas se calcula con la fórmula euclídea. Al ser perpendiculares las direcciones, queda

$$d(t) = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2} = \sqrt{(20 - 30t)^2 + (15 - 60t)^2}.$$

Desarrollamos para obtener una expresión que podamos minimizar:

$$d(t) = \sqrt{4500t^2 - 3000t + 625} \text{ km}, t \geq 0.$$

El radicando siempre es positivo: su discriminante es

$$(-3000)^2 - 4(4500)(625) = 9\,000\,000 - 11\,250\,000 < 0,$$

y el coeficiente de t^2 es positivo. Como la raíz cuadrada es creciente, minimizar $d(t)$ equivale a minimizar $g(t) = 4500t^2 - 3000t + 625$. Derivamos:

$$g'(t) = 9000t - 3000 = 0 \iff t = \frac{1}{3} \text{ h.}$$

Comprobamos el signo: $g'(0) = -3000 < 0$ y $g'(1) = 6000 > 0$; por tanto, g decrece antes de $t = 1/3$ y crece después. El mínimo es absoluto. Sustituimos:

$$d_{\min} = d\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{4500\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3000\left(\frac{1}{3}\right) + 625} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \text{ km.}$$

Por tanto, la distancia mínima entre las lanchas es

$$5\sqrt{5} \text{ km} \approx 11,18 \text{ km}.$$

Ejercicio B · Problema 4.2

Sea X el peso, en kilogramos, de un estudiante. Sigue una distribución normal de media 65 kg y desviación típica 1,5 kg: $X \sim N(65, 1,5)$. Para usar la tabla de la normal estándar, tipificamos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 65}{1,5}, Z \sim N(0, 1).$$

a) Porcentaje de estudiantes entre 63,5 kg y 68 kg

Convertimos ambos límites a puntuaciones típicas:

$$z_1 = \frac{63,5 - 65}{1,5} = -1, z_2 = \frac{68 - 65}{1,5} = 2.$$

Con la función de distribución normal estándar Φ ,

$$P(63,5 < X < 68) = P(-1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0,9772 - 0,1587 = 0,8185.$$

En porcentaje, la probabilidad es

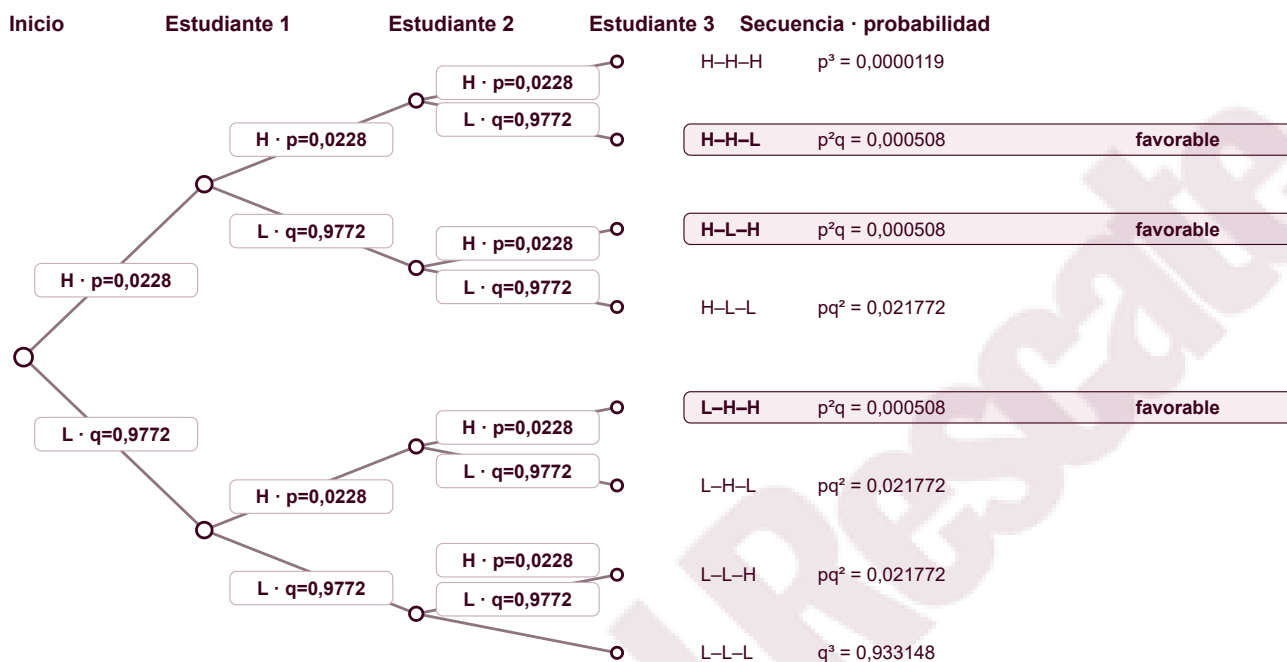
$$81,85\%.$$

b) Probabilidad de que exactamente dos de tres pesen más de 68 kg

Para cada estudiante hay dos posibilidades: H, si pesa más de 68 kg, o L, si pesa 68 kg o menos. Primero calculamos la probabilidad de cada caso:

$$p = P(H) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228, \quad q = P(L) = 1 - p = 0,9772.$$

Las tres elecciones se representan en el árbol. En cada nivel, cada rama indica si el estudiante queda en H o en L y anota su probabilidad p o q. Buscamos los caminos con exactamente dos H: HHL, HLH y LHH.



H: más de 68 kg · L: 68 kg o menos · Cada camino multiplica las probabilidades de sus tres ramas.

Para una de las tres secuencias favorables, la regla del producto da

$$P(HHL) = p \cdot p \cdot q = p^2q.$$

Las tres secuencias son incompatibles entre sí, así que sumamos sus probabilidades:

$$P(\text{exactamente dos}) = 3p^2q = 3(0,0228)^2(0,9772) = 0,001523962944 \approx 0,001524.$$

En porcentaje, la probabilidad pedida es **0,1524 % aproximadamente**.