

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Considerar las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Para qué valores reales de m es A inversible? Calcular la matriz A^{-1} (2 puntos).
 b) En la anterior matriz A con $m = 0$, obtener la matriz real cuadrada X de orden 3 que satisface la igualdad $B - AX = AB$ (1,3 puntos).

Solución:

a) A será inversible si y sólo si $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = 3 - 5m + m(m+1) = 3 - 5m + m^2 + m = m^2 - 4m + 3$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

A es inversible para $m \neq 1$ y $m \neq 3$

Calculemos A^{-1}

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -(m+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -m+4 & 1 \\ -m^2-m-3 & -15 & -5m \\ -m & -3 & -m \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & m-4 & 1 \\ m^2+m+3 & -15 & 5m \\ -m & 3 & -m \end{pmatrix}$$

$$(A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{m^2-4m+3} \begin{pmatrix} 1 & m^2+m+3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} \text{ para } m \neq 1 \text{ y } m \neq 3$$

b) La matriz A para $m = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Buscamos una matriz X / $B - AX = AB$, despejemos X

$$-AX = -B + AB$$

$$AX = B - AB$$

$$X = A^{-1}(B - AB) = A^{-1}B - A^{-1}AB = A^{-1}B - B = (A^{-1} - I)B$$

calculemos la expresión obtenida finalmente,

$$\text{Para } m = 0 \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -5 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -5 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -6 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1} - I)B = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & -6 & 1 \\ 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

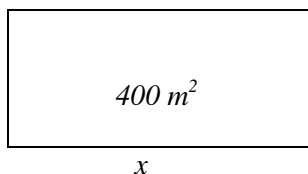
PROBLEMA 2. En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2 , que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:

a) Obtener razonadamente la función F tal que $F(x)$ sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x (1,3 puntos).

b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función $f(x)$ alcanza el valor mínimo (2 puntos).

Solución:

a) La zona a vallar es el rectángulo: y



La relación entre x e y viene dada por el área del rectángulo, $x \cdot y = 400 \quad y = \frac{400}{x}$

Para obtener el coste de la valla calculemos el perímetro de la zona,

$$P = 2x + 2y = 2x + 2\frac{400}{x} = 2x + \frac{800}{x} \rightarrow f(x) = 100\left(2x + \frac{800}{x}\right) = 200x + \frac{80000}{x}$$

Como x representa la longitud de un lado y la función anterior no se puede calcular para $x = 0$, obtenemos:

$$\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$$

b) Estudiemos la monotonía de $f(x)$

$$f'(x) = 200 - \frac{80000}{x^2}$$

$$200 - \frac{80000}{x^2} = 0 \rightarrow 200x^2 - 80000 = 0 \rightarrow 200x^2 = 80000 \rightarrow x^2 - 400 \rightarrow x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

$$\text{Como } \text{Dom } f(x) = (0, +\infty) \rightarrow x = 20$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ a la izquierda y derecha de 20,

x	$f'(x)$	
1	$200 - \frac{80000}{1} = 200 - 80000 < 0$	Por lo tanto, en $(0, 20)$ $f(x)$ es decreciente en $(20, +\infty)$ $f(x)$ es creciente
40	$200 - \frac{80000}{1600} = 200 - 50 > 0$	

Como en $x = 20$ $f(x)$ pasa de decreciente a creciente, en $x = 20$ $f(x)$ tiene un mínimo.

$$\text{Para } x = 20 \rightarrow y = \frac{400}{20} = 20$$

Solución: $f(x)$ alcanza el valor mínimo para $x = 20$, es decir, para una zona vallada cuadrada ($x = 20$ e $y = 20$).

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Las notas de Filosofía y de Literatura de los 7 alumnos de una clase, listadas por columnas, son:

Filosofía	3	6	7	5	8	4	8
Literatura	5	8	7	7	9	5	5

- a) Calcular el valor medio y la desviación típica de las notas de Filosofía y de las notas de Literatura (1,3 puntos).
 b) Obtener el coeficiente de correlación entre las notas de Filosofía y de Literatura, explicando su significado (0,7 puntos).
 c) Al prescindir de la última columna el coeficiente de correlación es 0,9. Explicar detalladamente por qué es mayor que el obtenido en el apartado b) (1,3 puntos).

Solución:

Obtengamos la tabla de valores que permitirá calcular los parámetros de los apartados a) y b)

Llamamos x = nota de Filosofía y = nota de Literatura

	x	y	x^2	y^2	$x y$
	3	5	9	25	15
	6	8	36	64	48
	7	7	49	49	49
	5	7	25	49	35
	8	9	64	81	72
	4	5	16	25	20
	8	5	64	25	40
Σ	41	46	263	318	279

a)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{41}{7} = 5'857 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{46}{7} = 6'571$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{263}{7} - \bar{x}^2} = 1'807 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{318}{7} - \bar{y}^2} = 1'498$$

Los resultados obtenidos son,

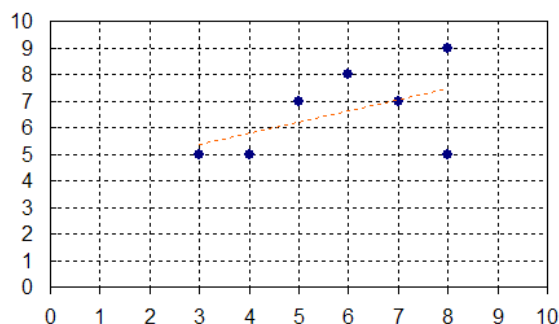
	Filosofía	Literatura
valor medio	5'857	6'571
desviación típica	1'807	1'498

b) El coeficiente de correlación entre las notas de las dos asignaturas es

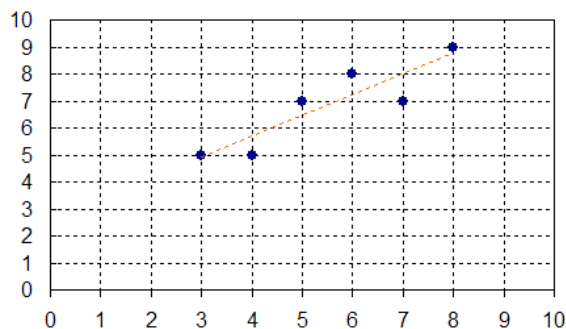
$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} = \frac{279}{7} - \bar{x} \bar{y} = 1'367 \quad \rho = \frac{1'367}{1'807 \cdot 1'498} = 0'505$$

Como el coeficiente de correlación es 0'505 la correlación entre las dos notas es débil. Hay poca relación entre las notas de Filosofía y Literatura de los siete alumnos estudiados.

c) Realizamos la representación gráfica de las notas de los 7 alumnos,



Realizamos la representación gráfica de las notas prescindiendo del último,



En esta última representación la nube de puntos está agrupada alrededor de una recta imaginaria (la de regresión) porque su correlación es fuerte (0'9).

Al añadir a la representación el punto correspondiente al séptimo alumno, este punto queda alejado de la nube anterior y por lo tanto la correlación entre las notas de los 7 alumnos es débil.

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En el espacio $\mathbb{R}^3$, se consideran el punto $P = (3,2,3)$ y la recta r intersección de los planos de ecuaciones: $x + 3y - 4z = 0$ y $x + 2y - 2z = 1$. Se pide determinar:

a) La distancia d del punto P a la recta r (1,3 puntos).

b) Los puntos M y N de la recta r que cumplan que su distancia al punto P es $\sqrt{5}d$ (2,3 puntos).

Solución:

a) El cálculo de la distancia de un punto a una recta lo realizamos mediante la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{\left| \vec{P} \vec{P}_r \times \vec{v}_r \right|}{\left| \vec{v}_r \right|} \quad \begin{array}{l} \text{siendo } P_r \text{ un punto de la recta } r \\ \vec{v}_r \text{ el vector director de } r \end{array}$$

Para obtener P_r y $\vec{v}_r$ pasamos la ecuación de r a paramétricas.

$$r: \begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$$

Planteamos el sistema, $\begin{cases} x + 3y = 4z \\ x + 2y = 1 + 2z \end{cases}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 4z & 3 \\ 1+2z & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{8z - 3 - 6z}{-1} = \frac{2z - 3}{-1} = 3 - 2z \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4z \\ 1 & 1+2z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 + 2z - 4z}{-1} = \frac{1 - 2z}{-1} = -1 + 2z \end{aligned}$$

$$\text{Luego } r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P_r(3, -1, 0) \\ \vec{v}_r(-2, 2, 1) \end{array}$$

$$\vec{P} \vec{P}_r = (3, -1, 0) - (3, 2, 3) = (0, -3, -3)$$

$$\vec{P} \vec{P}_r \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k} = (3, 6, -6)$$

$$\left| \vec{P} \vec{P}_r \times \vec{v}_r \right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

$$\left| \vec{v}_r \right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{Finalmente } d(P, r) = \frac{9}{3} = 3 \text{ u. l.}$$

b) Un punto de la recta r será $(3 - 2\lambda, -1 + 2\lambda, \lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}$ Buscamos puntos de r que cumplan

$$d((3 - 2\lambda, -1 + 2\lambda, \lambda), (3, 2, 3)) = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(3 - 2\lambda - 3)^2 + (-1 + 2\lambda - 2)^2 + (\lambda - 3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(-2\lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2 + (\lambda - 3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{4\lambda^2 + 9 - 12\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 6\lambda + 9} = 3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{9\lambda^2 - 18\lambda + 18} = 3\sqrt{5}$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda + 18 = 45 \rightarrow 9\lambda^2 - 18\lambda - 27 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{para } \lambda_1 = 3 \rightarrow M(5, -3, -1)$$

$$\lambda_2 = -1 \rightarrow N(-3, 5, 3)$$

c) El área del triángulo de vértices $P(3, 2, 3)$, $M(5, -3, -1)$ y $N(-3, 5, 3)$ la obtenemos mediante la fórmula

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{PM} \times \vec{PN} \right|$$

$$\vec{PM}(2, -5, -4) \quad \text{y} \quad \vec{PN}(-6, 3, 0)$$

$$\vec{PM} \times \vec{PN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & -4 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 24\vec{j} - 24\vec{k} = (12, -24, -24)$$

$$\left| \vec{PM} \times \vec{PN} \right| = \sqrt{12^2 + (-24)^2 + (-24)^2} = \sqrt{12^2 + 4 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12^2} = \sqrt{9 \cdot 12^2} = 3 \cdot 12 = 36$$

$$\text{Finalmente } A = \frac{1}{2} 36 = 18 \text{ u. a.}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcular: a) La matriz P^{-1} (1,1 puntos). b) La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$ (1,1 puntos). c) La matriz $(PQP^{-1})^2$ (1,1 puntos).

Solución:

a) Como $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1}$

Calculemos P^{-1}

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Buscamos la matriz $X / P^{-1}XP = Q$, efectuemos las operaciones necesarias para despejar X
 $P P^{-1}XP P^{-1} = P Q P^{-1} ; I X I = P Q P^{-1} ; \text{luego } X = P Q P^{-1}$

Calculemos la matriz X

$$X = P Q P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+12 & 4-6 \\ -12+18 & 8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) (P Q P^{-1})^2 = X^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-12 & -12+2 \\ 36-6 & -12+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. a) Representar la superficie S limitada entre el OX y la curva $y = x^2 - 4$, cuando $-2 \leq x \leq 2$. Obtener, razonadamente, mediante una integral el área de la superficie S (1,6 puntos).

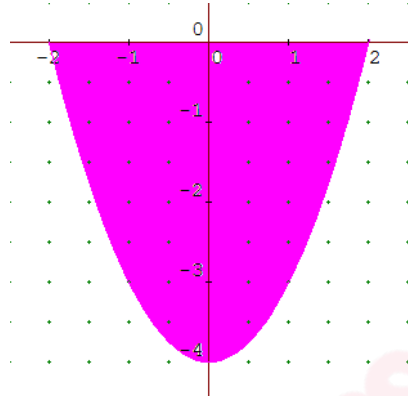
b) Hallar el volumen del cuerpo generado al dar un giro completo alrededor del eje OX la superficie S considerada en el apartado anterior, indicando como se ha obtenido el volumen (1,7 puntos).

Solución:

a) $y = x^2 - 4$ es una parábola cuyo vértice está en el punto: $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$. Vértice $(0, -4)$

Corte con el eje OX , $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$, $x = 2$ ó $x = -2$; $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

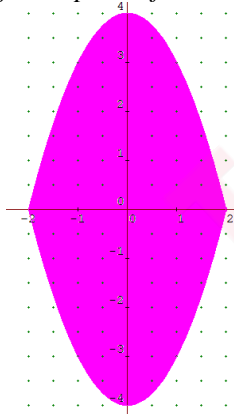
La representación gráfica de la superficie S será



Como $f(x) = x^2 - 4$ es continua en $[-2, 2]$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ es una primitiva de $f(x)$ podemos aplicar la regla de Barrow para calcular el área de la superficie S ,

$$A_S = \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^2 \right| = \left| \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 4 \cdot (-2) \right) \right| = \left| \frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8 \right| = \left| \frac{16}{3} - 16 \right| = \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u. a.}$$

b) Al girar alrededor del eje OX la superficie S engendra un volumen que coincide con el engendrado al girar alrededor del eje OX por la función $y = x^2 - 4$, $x \in [-2, 2]$. Gráficamente,



El cálculo
del volumen
es:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 4)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_{-2}^2 = \\ &= \pi \left[\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) - \left(\frac{-32}{5} - \frac{-64}{3} - 32 \right) \right] = \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 + \frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \\ &= \pi \left(\frac{64}{5} - \frac{128}{3} + 64 \right) = \pi \left(\frac{192 - 640 + 960}{15} \right) = \frac{512}{15} \pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. El peso medio de un grupo de 500 estudiantes es 68,5 kilos y la desviación típica, 10 kilos. Suponiendo que los pesos siguen una distribución normal, se pide:

- ¿Cuántos estudiantes pesan entre 48 y 71 kilos? (1 punto).
- ¿Cuántos estudiantes pesan más de 91 kilos? (1 punto).
- Se eligen 5 alumnos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de ellos pesen más de 75 kilos? (1,3 puntos).

Solución:

Llamando X = peso de un estudiante, X es una variable aleatoria / $X = N(68,5, 10)$

(Nota: como X es una v.a. continua se cumple que $P(X < a) = P(X \leq a)$)

a) Calculamos, en primer lugar, la probabilidad de que un estudiante pese entre 48 y 71 kilos,

$$\begin{aligned} P(48 < X < 71) &= P\left(\frac{48-68,5}{10} < \frac{X-68,5}{10} < \frac{71-68,5}{10}\right) = P(-2,05 < Z < 0,25) = P(Z < 0,25) - P(Z < -2,05) = \\ &= P(Z < 0,25) - (1 - P(Z < 2,05)) = 0,5987 - (1 - 0,9798) = 0,5987 - 0,0202 = 0,5785 \\ n &= 500 \cdot 0,5785 = 289,25. \text{ Es decir, 289 estudiantes pesan entre 48 y 71 kilos.} \end{aligned}$$

b) Calculamos, en primer lugar, la probabilidad de que un estudiante pese más de 91 kilos,

$$\begin{aligned} P(X > 91) &= P\left(\frac{X-68,5}{10} > \frac{91-68,5}{10}\right) = P(Z > 2,25) = 1 - P(Z < 2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122 \\ n &= 500 \cdot 0,0122 = 6,1. \text{ Es decir, 6 estudiantes pesan más de 91 kilos.} \end{aligned}$$

c) Consideramos la v. a. Y = número de estudiantes que pesan más de 75 kilos de un grupo de 5.

Y es una v. a. binomial de parámetros $n = 5$ y $p = P(X > 75)$

$$P(X > 75) = P\left(\frac{X-68,5}{10} > \frac{75-68,5}{10}\right) = P(Z > 0,65) = 1 - P(Z < 0,65) = 1 - 0,7422 = 0,2578$$

Luego $Y = B(5, 0,2578)$ y $q = 0,7422$

El suceso "exactamente dos de ellos pesen más de 75 kilos" corresponde a $Y = 2$

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} 0,2578^2 \cdot 0,7422^3 = 10 \cdot 0,2578^2 \cdot 0,7422^3 = 0,271724423 \approx 0,2717$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean π y π' los planos del espacio $\mathbb{R}^3$, determinados del modo siguiente: el plano π pasa por los puntos $(0,2,1)$, $(3,-1,1)$ y $(1,-1,5)$ y el plano π' pasa por los puntos $(3,0,2)$, $(2,1,1)$ y $(5,4,-2)$. Se pide calcular:

- Una ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π' (1,3 puntos).
- El ángulo α que forman los planos π y π' (0,7 puntos).
- La ecuación del plano que contiene a la recta r y forma un ángulo de 90 grados con el plano π (1,3 puntos).

Solución:

a) En primer lugar calculamos las ecuaciones generales de los dos planos.

Como de cada plano conocemos tres puntos, podemos formar dos vectores que, si no son paralelos, serán directores del plano.

La ecuación del plano se obtiene:

$$\begin{array}{l} \text{Plano } \pi, \\ \vec{u} = (3,-1,1) - (0,2,1) = (3,-3,0) \\ \vec{v} = (1,-1,5) - (0,2,1) = (1,-3,4) \\ \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ no son paralelos} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & x \\ -3 & -3 & y-2 \\ 0 & 4 & z-1 \end{array} \right| = 0 \rightarrow x \left| \begin{array}{cc} -3 & -3 \\ 0 & 4 \end{array} \right| - (y-2) \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{array} \right| + (z-1) \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{array} \right| = 0 \\ -12x - (y-2)12 + (z-1)(-9+3) = 0 \\ -12x - 12y + 24 - 6z + 6 = 0 \\ -12x - 12y - 6z + 30 = 0 \rightarrow 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{array}$$

La ecuación del plano se obtiene:

$$\begin{array}{l} \text{Plano } \pi', \\ \vec{u} = (2,1,1) - (3,0,2) = (-1,1,-1) \\ \vec{v} = (5,4,-2) - (3,0,2) = (2,4,-4) \\ \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ no son paralelos} \end{array} \quad \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 2 & x-3 \\ 1 & 4 & y \\ -1 & -4 & z-2 \end{array} \right| = 0 \rightarrow (x-3) \left| \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{array} \right| - y \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{array} \right| + (z-2) \left| \begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{array} \right| = 0 \\ (x-3)(-4+4) - y(4+2) + (z-2)(-4-2) = 0 \\ -6y - 6z + 12 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{array}$$

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ La ecuación paramétrica de r la encontramos resolviendo este sistema.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ las incógnitas principales son x e y

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 - z \\ y = 2 - z \end{cases}$$

$$2x + 2(2 - z) = 5 - z \rightarrow 2x + 4 - 2z = 5 - z \rightarrow 2x = -4 + 2z + 5 - z$$

$$2x = 1 + z \rightarrow x = \frac{1+z}{2}$$

$$\text{La ecuación paramétrica de } r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Siendo $\vec{n}_\pi$ un vector ortogonal al plano π , si $\alpha = \text{ang}(\pi, \pi') \rightarrow \cos \alpha = \frac{\left| \begin{smallmatrix} \rightarrow & \rightarrow \\ n_\pi & n_{\pi'} \end{smallmatrix} \right|}{\left| \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ n_\pi \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} \rightarrow \\ n_{\pi'} \end{smallmatrix} \right|}$

$$\vec{n}_\pi = (2, 2, 1) \quad y \quad \vec{n}_{\pi'} = (0, 1, 1) \quad \text{luego} \quad \cos \alpha = \frac{|(2, 2, 1) \cdot (0, 1, 1)|}{|(2, 2, 1)| |(0, 1, 1)|} = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1} \sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Luego} \quad \alpha = 45^\circ \quad o \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rads}$$

c) Buscamos un plano γ tal que $r \in \gamma$ y $(\gamma, \pi) = 90^\circ$

como γ y π deben ser $\perp \rightarrow \vec{n}_\pi$ será vector director de γ

como $r \in \gamma \Rightarrow \vec{v}_r$ es director de γ
 P_r es punto de γ

$$\text{De } \gamma \text{ conocemos } \begin{cases} \vec{u} (2, 2, 1) \\ \vec{v} \left(\frac{1}{2}, -1, 1 \right) \\ P \left(\frac{1}{2}, 2, 0 \right) \end{cases} \quad \text{la ecuación de } \gamma \quad \begin{vmatrix} 2 & 1/2 & x-1/2 \\ 2 & -1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y - 2) \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2} \right) 3 - (y - 2) \frac{3}{2} + z (-3) = 0 \rightarrow 3x - \frac{3}{2} - \frac{3y}{2} + 3 - 3z = 0 \rightarrow 3x - \frac{3y}{2} - 3z + \frac{3}{2} = 0$$

$$6x - 3y - 6z + 3 = 0 \rightarrow 2x - y - 2z + 1 = 0$$

La ecuación del plano $\gamma: 2x - y - 2z + 1 = 0$