

Se resuelven los tres problemas de las dos opciones para cubrir la propuesta completa.

Opción A

Problema 1 - Compra y venta de aparatos

Sean x e y los aparatos A y B. La inversión disponible y la capacidad de almacenaje imponen

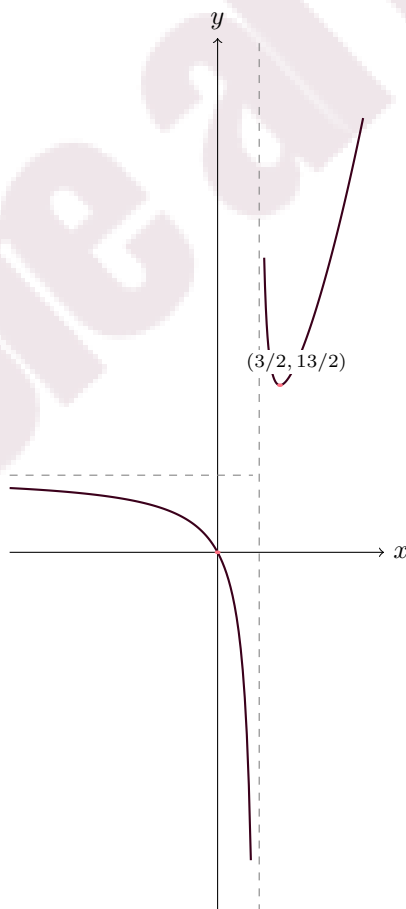
$$15x + 11y \leq 1000, \quad x + y \leq 80, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio por aparato es su precio de venta menos su coste: $22 - 15 = 7$ € para A y $17 - 11 = 6$ € para B. Queremos maximizar $G = 7x + 6y$. Los vértices factibles son $(0, 0)$, $(0, 80)$, $(1000/15, 0)$ y la intersección de las dos restricciones, $(30, 50)$. Comparamos los beneficios: 0, 480, $1400/3$ y 510 euros.

Debe comprar 30 aparatos A y 50 B; el beneficio máximo es 510 €.

Problema 2 - Esbozo de una función

No se da una fórmula explícita, sino propiedades de la gráfica. La función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ y tiene asíntota vertical $x = 1$. Corta ambos ejes en $(0, 0)$ y su única asíntota horizontal es $y = 3$. Como $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$, la rama izquierda es decreciente; al pasar por $(0, 0)$ y tener asíntota vertical, se aproxima a 3 cuando $x \rightarrow -\infty$ y a $-\infty$ cuando $x \rightarrow 1^-$. En la derecha decrece hasta el único punto crítico $x = 3/2$, donde alcanza $f(3/2) = 13/2$, y después crece. Por ello, $x = 3/2$ es un mínimo local. Esa rama parte de $+\infty$ cuando $x \rightarrow 1^+$ y crece sin cota al avanzar hacia $+\infty$; la asíntota horizontal $y = 3$ se alcanza por la izquierda, cuando $x \rightarrow -\infty$.



La función decrece en $(-\infty, 1)$ y $(1, 3/2)$, crece en $(3/2, \infty)$ y tiene un mínimo local $(3/2, 13/2)$.

Problema 3 · Sucesos independientes

Sean C «ser socio del club» y R «ser pelirrojo». Como son independientes, $P(C \cap R) = P(C)P(R) = 0,15 \cdot 0,03 = 0,0045$. a) La probabilidad de ser pelirrojo y no socio es $P(R \cap \bar{C}) = 0,03 \cdot 0,85 = 0,0255$. b) Por la fórmula de la unión,

$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = 0,03 + 0,15 - 0,0045 = 0,1755.$$

c) La independencia también implica que C es independiente de no ser pelirrojo; por tanto $P(C | \bar{R}) = P(C) = 0,15$.

$$P(R \cap \bar{C}) = 0,0255, \quad P(R \cup C) = 0,1755, \quad P(C | \bar{R}) = 0,15.$$

Opción B

Problema 1 · Ecuación matricial con incógnitas

Escribimos $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$. Al calcular los dos productos,

$$AX = \begin{pmatrix} x+2y & 2z \\ -x+3y & 3z \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} x & 2x \\ y-z & 2y+3z \end{pmatrix}.$$

Igualar $AX - XA$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ proporciona $2y = 2$, $2z - 2x = -6$, $-x + 2y + z = -1$ y $-2y = -2$. Las dos últimas ecuaciones son compatibles con las primeras: $y = 1$ y $z = x - 3$, con x libre.

$$X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 · Ingresos de una red comercial

a) Con 15 comerciales que ingresan 5750 € cada uno, los ingresos actuales son $15 \cdot 5750 = 86250$ € mensuales. b) Si se contratan x comerciales nuevos, cada uno de los $15 + x$ comerciales ingresa $5750 - 250x$ euros. Así,

$$I(x) = (15 + x)(5750 - 250x) = -250x^2 + 2000x + 86250.$$

c) El dominio contextual es $x \geq 0$ (y no se pueden contratar más de 23 antes de que el ingreso individual sea negativo). Al derivar, $I'(x) = -500x + 2000 = 0$ da $x = 4$. Como la parábola es cóncava, este punto es el máximo. Por tanto, la empresa debe tener $15 + 4 = 19$ comerciales. d) El ingreso correspondiente es

$$I(4) = 19 \cdot 4750 = 90250 \text{ €}.$$

$$I(0) = 86250 \text{ €}; \quad I(x) = -250x^2 + 2000x + 86250; \quad 19 \text{ comerciales en total}; \quad I_{\max} = 90250 \text{ €}.$$

Problema 3 · Extracción de urnas

La urna se elige con probabilidad $1/3$. Las probabilidades de extraer una bola roja de cada urna son 0 , $2/4 = 1/2$ y $3/4$. a) Sumamos las probabilidades de las tres ramas:

$$P(R) = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{5}{12}.$$

b) Por Bayes, la probabilidad de haber elegido la segunda urna sabiendo que salió roja es

$$P(U_2 | R) = \frac{P(U_2)P(R | U_2)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}.$$

$$P(R) = \frac{5}{12}, \quad P(U_2 | R) = \frac{2}{5}.$$