

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2016

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Estudio de una función

La función $f(x) = (6-x)e^{x/3}$ es producto de funciones definidas para todo real, por lo que su dominio es $\mathbb{R}$. No puede tener asíntotas verticales. Para estudiar el comportamiento en los extremos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6-x)e^{x/3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (6-x)e^{x/3} = -\infty.$$

En el primer límite, la exponencial tiende a cero más deprisa de lo que crece $6-x$; en el segundo, el factor $6-x$ es negativo y el producto decrece sin cota. Así, $y=0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$, no hay horizontal en $+\infty$ y el comportamiento exponencial descarta una asíntota oblicua. Los cortes son $f(0)=6$ con el eje y y $(6-x)e^{x/3}=0 \Rightarrow x=6$ con el eje x .

Para estudiar crecimiento, derivamos y analizamos el signo:

$$f'(x) = -e^{x/3} + \frac{6-x}{3}e^{x/3} = \frac{3-x}{3}e^{x/3}.$$

Como $e^{x/3} > 0$, el signo depende de $3-x$: $f'(x) > 0$ si $x < 3$ y $f'(x) < 0$ si $x > 3$. Luego la función crece en $(-\infty, 3)$ y decrece en $(3, +\infty)$; cambia de creciente a decreciente en $x=3$, donde $f(3)=3e$. **Conclusión.** El dominio es $\mathbb{R}$; la única asíntota es $y=0$ hacia $-\infty$, los cortes son $(6,0)$ y $(0,6)$, y hay un máximo relativo en $(3, 3e)$.

c) Área del triángulo de la tangente con los ejes. La recta tangente en $x=a$ se escribe $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. En $a=0$, $f(0)=6$ y $f'(0)=1$, así que la tangente es $y=x+6$. Sus cortes con los ejes son $(-6,0)$ y $(0,6)$. El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de las longitudes de sus catetos:

$$A = \frac{1}{2} |-6| |6| = 18.$$

Conclusión. El área es 18 unidades cuadradas.

Opción A - Ejercicio 2. Rectas en el espacio

Convertimos r a forma paramétrica, como se obtiene una recta dada por dos planos. Tomando $z=t$, la primera ecuación da $x=1+2t$ y la segunda, $y=3-3t$. Por tanto,

$$r: \begin{cases} x=1+2t, \\ y=3-3t, \\ z=t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} = (2, -3, 1).$$

La recta s ya está en forma paramétrica: un punto suyo es $S_0 = (2, 1, 0)$ y su vector director es $\vec{v} = (1, -3, 1)$.

a) Recta por P que corta perpendicularmente a r . El punto de corte H debe pertenecer a r y el vector $H-P$ debe ser perpendicular a $\vec{u}$. Escribimos $H = (1+2t, 3-3t, t)$ e imponemos producto escalar nulo:

$$(H-P) \cdot \vec{u} = (2t, 3-3t, t-5) \cdot (2, -3, 1) = 14t - 14 = 0,$$

de donde $t=1$ y $H = (3, 0, 1)$. Entonces $\overrightarrow{PH} = H-P = (2, 0, -4)$, que podemos simplificar a la dirección $(1, 0, -2)$. La recta pedida es

$$\begin{cases} x=1+\lambda, \\ y=0, \\ z=5-2\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Plano que contiene a r y es paralelo a s . El plano contiene los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo que un vector normal se obtiene con su producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0, -1, -3) \sim (0, 1, 3).$$

Usando el punto $(1, 3, 0)$ de r en la ecuación punto-normal, resulta

$$0(x - 1) + (y - 3) + 3z = 0.$$

Conclusión. El plano es $y + 3z - 3 = 0$.

c) Distancia entre r y s . Los vectores directores no son proporcionales. Además, al igualar sus ecuaciones no se obtiene un punto común, así que son rectas alabeadas. La distancia entre rectas alabeadas es

$$d(r, s) = \frac{|(S_0 - R_0) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|},$$

donde $R_0 = (1, 3, 0)$ y $S_0 = (2, 1, 0)$. Sustituyendo,

$$d(r, s) = \frac{|(1, -2, 0) \cdot (0, -1, -3)|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Conclusión. La distancia entre las rectas es $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Opción A - Ejercicio 3. Matrices y rango

a) Determinación de α y β . Calculamos primero la potencia de la segunda matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

La igualdad de matrices equivale a la igualdad de sus cuatro elementos correspondientes. De la entrada superior derecha, $-4\alpha = -8$, luego $\alpha = 2$. La entrada superior izquierda da $3\alpha + \beta = 3$, por lo que $\beta = -3$. Las dos entradas restantes quedan verificadas: $5\alpha + 4\beta = -2$ y $-\alpha + \beta = -5$. **Conclusión.** $\alpha = 2$ y $\beta = -3$.

b) Valores de λ para que $\text{rg}(A) = 2$. La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada de orden 2 tiene rango 2 exactamente cuando su determinante es distinto de cero:

$$\det A = (2\lambda + 1)(3\lambda + 1) - 2\lambda^2 = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = (4\lambda + 1)(\lambda + 1).$$

Por tanto, el determinante se anula en $\lambda = -\frac{1}{4}$ o $\lambda = -1$. En esos casos no puede tener rango 2; para cualquier otro real sí lo tiene. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 2$ si y solo si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{4}\}$.

Opción A - Ejercicio 4. Sistema de becas

Sean g , f y p los números de becas universitarias, de formación profesional y de postgrado, respectivamente. Las condiciones del enunciado producen el sistema

$$\begin{cases} g + f + p = 115, \\ 3000g + 2000f + 1500p = 247000, \\ f = 2p. \end{cases}$$

De $f = 2p$ y la primera ecuación, $g = 115 - 3p$. Sustituimos estas expresiones en el presupuesto:

$$3000(115 - 3p) + 2000(2p) + 1500p = 247000 \implies 345000 - 3500p = 247000,$$

de donde $p = 28$. Entonces $f = 56$ y $g = 31$. Comprobamos: $31 + 56 + 28 = 115$ y $3000 \cdot 31 + 2000 \cdot 56 + 1500 \cdot 28 = 247000$. **Conclusión.** Se concedieron 31 becas universitarias, 56 de formación profesional y 28 de postgrado.

Opción B - Ejercicio 1. Discusión de un sistema

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante para localizar los posibles valores singulares:

$$\det A = (a - 2)(a + 1).$$

Si $a \neq 2, -1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, que es el número de incógnitas; por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Para $a = 2$ o $a = -1$, el menor de orden dos formado por las filas primera y tercera y las columnas primera y segunda vale

$$\begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = a + 1.$$

En $a = 2$ vale $3 \neq 0$, y en $a = -1$ vale 0 , así que para el segundo caso elegimos el menor de filas segunda y tercera, columnas primera y tercera:

$$\begin{vmatrix} 2 & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a,$$

que vale $3 \neq 0$ cuando $a = -1$. Por ello $\text{rg}(A) = 2$ en ambos valores singulares.

Si $a = 2$, las dos primeras ecuaciones coinciden y la tercera es independiente. Al sustituir $a = 2$ en los términos independientes, las ecuaciones son compatibles, de modo que $\text{rg}(A^*) = 2$. Como los rangos coinciden y son menores que 3 , el sistema es compatible indeterminado. Si $a = -1$, la primera fila de coeficientes es -2 veces la tercera, pero sus términos independientes no cumplen esa misma relación: $-1 \neq -2(2) = -4$. Por tanto $\text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible. **Conclusión.** El sistema es SCD si $a \neq 2, -1$, SCL si $a = 2$ y SI si $a = -1$.

b) Resolución cuando sea posible. Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$(a - 2)(y + z - 1) = 0.$$

Si $a \neq 2$, entonces $y + z = 1$. La tercera ecuación, junto con esta igualdad, da $x = a$. Al sustituir en la segunda,

$$y - az = 2 - 2a, \quad y = 1 - z,$$

por lo que $(a + 1)z = 2a - 1$. Así, si $a \neq -1, 2$,

$$(x, y, z) = \left(a, \frac{2-a}{a+1}, \frac{2a-1}{a+1} \right).$$

Para $a = -1$ el sistema es incompatible, así que no tiene solución. Para $a = 2$, las ecuaciones independientes se reducen a $y = 0$ y $x - z = 1$; dejando $z = t$ libre,

$$(x, y, z) = (1 + t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Conclusión. La solución es única para $a \neq -1, 2$, no existe para $a = -1$ y es una familia con un parámetro para $a = 2$.

Opción B - Ejercicio 2. Continuidad, derivabilidad e integral

En la rama $x \leq 0$, $5 - x \geq 5$; en la rama $x > 0$, $5 + x > 5$. Ningún denominador se anula en la rama donde se utiliza, así que el dominio es $\mathbb{R}$ y no hay asíntotas verticales. Los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$ valen 0 , luego $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos.

En $x = 0$, el valor es $f(0) = \frac{1}{5}$ y los límites laterales también valen $\frac{1}{5}$, así que la función es continua. Para $x < 0$ y $x > 0$ derivamos cada expresión:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2}, & x < 0, \\ -\frac{1}{(5+x)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Las derivadas laterales en cero son $\frac{1}{25}$ y $-\frac{1}{25}$; como no coinciden, la función no es derivable en 0 .

Para integrar, separamos en 0 porque cambia la expresión:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{dx}{5-x} + \int_0^1 \frac{dx}{5+x}.$$

Las primitivas son $-\ln(5-x)$ y $\ln(5+x)$, respectivamente. Por tanto,

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{5-x} = [-\ln(5-x)]_{-1}^0 = \ln \frac{6}{5}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{5+x} = [\ln(5+x)]_0^1 = \ln \frac{6}{5}.$$

Conclusión. Es continua en todo $\mathbb{R}$, no es derivable en 0 , tiene asíntota horizontal $y = 0$ en ambos extremos y la integral vale $2 \ln \frac{6}{5}$.

Opción B - Ejercicio 3. Volumen de un tetraedro

Primero hallamos el plano que pasa por A , B y C . Dos vectores contenidos en él son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -2, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, -4, -2).$$

Su producto vectorial es un vector normal:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4, 2, -6) \sim (2, 1, -3).$$

Usando el punto $A(0, 2, 1)$, la ecuación del plano queda

$$2(x - 0) + (y - 2) - 3(z - 1) = 0 \implies 2x + y - 3z + 1 = 0.$$

Los cortes con los ejes se obtienen anulando las otras dos coordenadas:

$$X = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad Y = (0, -1, 0), \quad Z = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right).$$

El volumen del tetraedro con vértices O, X, Y, Z es un sexto del volumen del paralelepípedo formado por sus tres vectores de arista desde el origen. Como estos vectores son ortogonales a pares, equivale a

$$V = \frac{|x_X y_Y z_Z|}{6} = \frac{\left|(-\frac{1}{2})(-1)(\frac{1}{3})\right|}{6} = \frac{1}{36}.$$

Conclusión. El volumen es $\frac{1}{36}$ unidades cúbicas.

Opción B - Ejercicio 4. Planos

a) Plano perpendicular a π que contiene el eje OX . Todo plano que contiene el eje OX tiene ecuación $By + Cz = 0$, pues debe contener todos los puntos $(x, 0, 0)$. Su vector normal es $(0, B, C)$. Para que sea perpendicular a π , con normal $(3, 3, 1)$, imponemos producto escalar nulo:

$$(0, B, C) \cdot (3, 3, 1) = 3B + C = 0.$$

Tomando $B = 1$ y $C = -3$, obtenemos **Conclusión.** El plano pedido es $y - 3z = 0$.

b) Punto de π más cercano al origen. El punto del plano más cercano al origen es su proyección ortogonal; por ello, el vector que une el origen con dicho punto debe ser paralelo al vector normal $\vec{n} = (3, 3, 1)$. La proyección del origen sobre $3x + 3y + z - 9 = 0$ se calcula con

$$H = O - \frac{\vec{n} \cdot O - 9}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = O - \frac{-9}{19} (3, 3, 1) = \left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right).$$

Conclusión. El punto más cercano al origen es $\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$.