

Modelo 1 de 2001

Se estudian áreas, funciones racionales, matrices, circunferencias y rectas en el espacio.

Opción A - Ejercicio 1

La región entre $y = x^2$ y $y = 1$ se extiende desde sus intersecciones $x = -1$ y $x = 1$. Su área total es

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

La recta horizontal $y = a$, con $0 \leq a \leq 1$, deja debajo de ella una parte de área

$$S_1 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \frac{4}{3} a^{3/2}.$$

Para dividir la región en dos partes iguales se impone $S_1 = S/2 = 2/3$. Así,

$$a^{3/2} = \frac{1}{2}, \quad a = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Opción A - Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dividiendo:

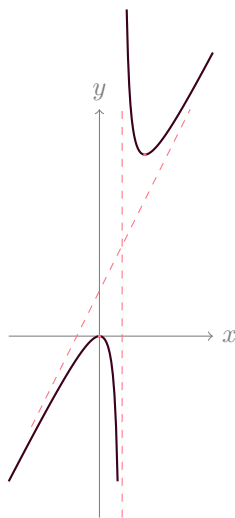
$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1} = 2x + 2 + \frac{2}{x-1}.$$

Por tanto, $x = 1$ es asíntota vertical, con límite $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha; además, $y = 2x + 2$ es oblicua porque la diferencia tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

La derivada es

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Los valores que dividen el dominio en intervalos son 0, 1, 2. El denominador es positivo, así que el signo lo determina $x(x-2)$: la función crece en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$, y decrece en $(0, 1)$ y $(1, 2)$. En $x = 0$ pasa de creciente a decreciente, luego hay un máximo local $(0, 0)$; en $x = 2$ pasa de decreciente a creciente, por lo que hay un mínimo local $(2, 8)$.



Opción A - Ejercicio 3

Para una matriz cuadrada existe inversa si y solo si su determinante es distinto de cero; además, $\det(M^{-1}) = 1/\det M$. La matriz B no es cuadrada y C tiene determinante cero. Para las otras:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \det D = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Por tanto, A y D sí tienen inversa, mientras que B y C no. Los determinantes de las inversas son

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}, \quad \det(D^{-1}) = 1.$$

Opción A - Ejercicio 4

El centro está en el semieje positivo de abscisas, así que lo escribimos $(h, 0)$ con $h > 0$. Como la circunferencia pasa por el origen, su radio es h . La tangencia a la recta $x + y = 1$ exige que la distancia del centro a esa recta sea el radio:

$$\frac{|h - 1|}{\sqrt{2}} = h.$$

Si $h > 1$, la ecuación $h - 1 = \sqrt{2}h$ no tiene solución positiva. Para $0 < h < 1$:

$$1 - h = \sqrt{2}h \implies h = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

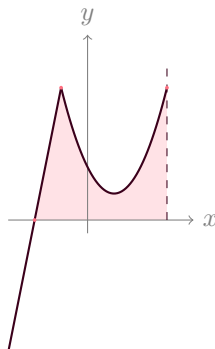
Así, el centro y el radio son

$$C = (\sqrt{2} - 1, 0), \quad r = \sqrt{2} - 1.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función es lineal para $x \leq -1$ y cuadrática para $x > -1$. Ambas ramas valen 5 en $x = -1$, por lo que se unen allí. La recta $5x + 10$ corta al eje x en $x = -2$; la parábola $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ es siempre positiva. El recinto con el eje x y la recta $x = 3$ tiene área

$$S = \int_{-2}^{-1} (5x + 10) dx + \int_{-1}^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \frac{5}{2} + \frac{28}{3} = \boxed{\frac{71}{6}}.$$



Opción B - Ejercicio 2

Al llevar las fracciones a un denominador común:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}.$$

Numerador y denominador tienden a cero cuando $x \rightarrow 1$, así que aplicamos dos veces L'Hôpital. La primera derivada da $\ln x$ arriba y $\ln x + (x-1)/x$ abajo, que también se anulan en 1. La segunda derivada da $1/x$ y $1/x + 1/x^2$, respectivamente. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}.$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada del sistema son

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & a & 2 \\ a & -1 & a-2 \end{pmatrix}, \quad A_a^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & -1 & a-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\det A_a = 2(a-1)(2a-1).$$

Si $a \neq 1, \frac{1}{2}$, el determinante no se anula, luego los rangos de A_a y A_a^* son 3: el sistema es SCD. Para $a = \frac{1}{2}$, el menor formado por las filas 1 y 2 y columnas 1 y 2 vale $1/2$, luego $\text{rg}(A_a) = 2$. Además, la fila 3 de A_a es la mitad de la fila 1, pero el término independiente de la tercera ecuación es 1 y la mitad del primero es $1/2$; hay contradicción y $\text{rg}(A_a^*) = 3$. El sistema es SI. Para $a = 1$, $\text{rg}(A_a) = \text{rg}(A_a^*) = 2 < 3$, así que es SCI. Resolviendo en este último caso:

$$(x, y, z) = (1-t, -2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Sean $A = (1, 0, 3)$ y $B = (3, -1, 0)$. La recta AB tiene vector director

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, -3).$$

La otra recta pasa por $C = (0, -1, 2)$ y $D = (a, b, -1)$, por lo que su director es $\overrightarrow{CD} = D - C = (a, b+1, -3)$. Para que ambas rectas se corten perpendicularmente, sus directores deben ser ortogonales y debe existir un punto común. Al resolver esas condiciones se obtiene

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \quad R = A + \frac{1}{7}(2, -1, -3) = C - \frac{4}{21} \left(-\frac{27}{4}, -\frac{9}{2}, -3 \right).$$

De aquí

$$a = -\frac{27}{4}, \quad b = -\frac{11}{2}.$$