

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Septiembre de 2008 · Convocatoria extraordinaria

Se desarrollan los ocho problemas para estudiar toda la propuesta; en el examen se elige uno de los ejercicios y tres de sus problemas.

Ejercicio A

Problema 1 · Presupuesto de vacaciones

Sean L, C, T los precios del ordenador, la cámara y el viaje. Se gasta todo el presupuesto y el ordenador cuesta 140 € más que cámara y viaje juntos:

$$L + C + T = 1372, \quad L = C + T + 140.$$

Al no comprar la cámara, pero invitar al hermano por la mitad del precio inicial del viaje, se gastarían $L + T + T/2$ y quedarían 208 €. Por ello,

$$L + \frac{3}{2}T = 1372 - 208 = 1164.$$

De las dos primeras igualdades, $2(C + T) + 140 = 1372$, luego $C + T = 616$ y $L = 756$. La última ecuación da $T = 272$ y, en consecuencia, $C = 344$.

Ordenador: 756 €; cámara: 344 €; viaje: 272 €.

Problema 2 · Estudio y gráfica de una función

Sea $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. El denominador se anula en $x = \pm 1$, de modo que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. El numerador solo se anula en 0, que da el corte $(0, 0)$. Los límites laterales en las discontinuidades dan asíntotas verticales: en $x = -1$ los límites son $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha; en $x = 1$ son $+\infty$ por la izquierda y $-\infty$ por la derecha.

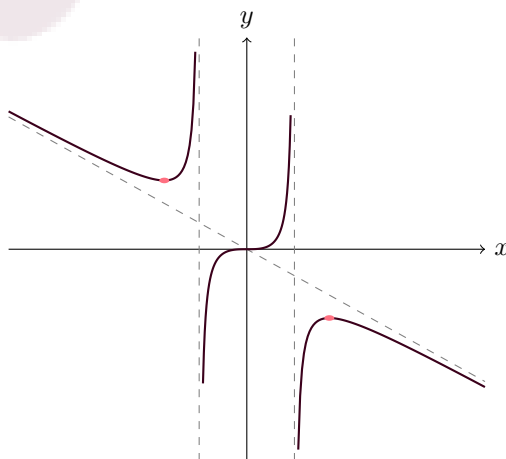
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{1-x^2} \rightarrow -1, \quad f(x) + x = \frac{x}{1-x^2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty).$$

Por ello hay asíntota oblicua $y = -x$. Derivamos para estudiar el crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

El denominador es positivo. El signo se determina por $3 - x^2$ (salvo que $f'(0) = 0$ sin cambio de signo): decrece si $|x| > \sqrt{3}$ y crece si $|x| < \sqrt{3}$, separando $x = \pm 1$ por no pertenecer al dominio. Así, hay mínimo en $x = -\sqrt{3}$ y máximo en $x = \sqrt{3}$:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad f(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}; (0, 0); x = \pm 1; y = -x; \min \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right), \max \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right).$$

Problema 3 · Parámetros de un polinomio

La derivada de $f(x) = x^3 + rx^2 + sx + t$ debe anularse en los dos extremos indicados. Además, al haber un máximo en -2 y un mínimo en 0 , la derivada cuadrática tiene esas dos raíces:

$$f'(x) = 3x^2 + 2rx + s = 3(x + 2)x = 3x^2 + 6x.$$

Igualando coeficientes se obtiene $r = 3$ y $s = 0$. Como la gráfica pasa por $(1, -1)$, se cumple $1 + r + s + t = -1$, de donde $t = -5$.

$$r = 3, \quad s = 0, \quad t = -5.$$

Problema 4 · Defectos de fabricación

Llamemos D al suceso «coche defectuoso» y C al suceso «fabricado en C». Sumamos las probabilidades de los cuatro caminos que terminan en defecto:

$$P(D) = 0,4 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,03 + 0,1 \cdot 0,02 = 0,04.$$

Para la probabilidad solicitada en el apartado b), Bayes invierte la condición: entre los coches no defectuosos, seleccionamos los de C. Así,

$$P(C \mid \overline{D}) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,2 \cdot 0,97}{0,96} = \frac{97}{480} \approx 0,2021.$$

$$P(D) = 0,04, \quad P(C \mid \overline{D}) = \frac{97}{480} \approx 20,21\%.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Inversa y ecuación matricial

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, el determinante es $2 - 12 = -10 \neq 0$, así que existe la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

La ecuación $XA^2 + 5A = M$, con $M = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$, se resuelve multiplicando a la derecha por A^{-2} :

$$X = (M - 5A)(A^2)^{-1}.$$

Calculamos $M - 5A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -10 & -30 \end{pmatrix}$ y $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es 100. Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -10 & -30 \end{pmatrix} \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 16 & -9 \\ -12 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Pesca e ingresos máximos

Sean x e y las toneladas de rape y merluza. Las cuotas y la relación entre capturas son

$$x + y \leq 30, \quad x \leq 3y, \quad y \leq 18, \quad x, y \geq 0.$$

El ingreso por tonelada es 15.000 € de rape y 10.000 € de merluza, así que $I = 15000x + 10000y$. Los vértices de la región factible son $(0, 0)$, $(0, 18)$, $(12, 18)$ y $(22,5, 7,5)$. Evaluamos la función objetivo:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 18)$	$(12, 18)$	$(22,5, 7,5)$
I (€)	0	180000	360000	412500

Conviene capturar 22,5 t de rape y 7,5 t de merluza; $I_{\max} = 412500$ €.

Problema 3 · Beneficio de una empresa

La cuenta de resultados (en millones de euros) es $P(x) = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}$, donde $x \geq 0$ representa los años transcurridos. Como el denominador es positivo, el punto de equilibrio se obtiene anulando el numerador:

$$5x^2 + 20x - 25 = 5(x + 5)(x - 1) = 0.$$

Solo $x = 1$ es admisible en el contexto: deja de haber pérdidas al cumplirse el primer año. Para localizar el máximo,

$$P'(x) = \frac{-20(x - 7)(x + 1)}{(x^2 + 7)^2}.$$

En $0 \leq x < 7$ la derivada es positiva y para $x > 7$ es negativa; por tanto, el máximo ocurre en $x = 7$:

$$P(7) = \frac{360}{56} = \frac{45}{7} \text{ millones de euros.}$$

Finalmente, el límite del cociente de los términos de mayor grado es 5.

Equilibrio al año 1; máximo a los 7 años: $\frac{45}{7}$ millones; $P(x) \rightarrow 5$ millones.

Problema 4 · Operaciones con sucesos

Como $P(A | B) = 1$, el suceso B está contenido en A salvo sucesos de probabilidad nula. De ahí que $P(A \cap B) = P(B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = P(A) = 0,7$. La probabilidad condicionada inversa es

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}.$$

Para que fueran independientes se requeriría $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, pero $0,2 \neq 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$.

$P(A \cap B) = 0,2$, $P(A \cup B) = 0,7$, $P(B | A) = \frac{2}{7}$; A, B no son independientes.